

KOSTYCHEV-ORLOV EQUATION AND FIRST MATHEMATICAL MODELS OF HUMUS DYNAMICS

M.V. Glagolev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Corresponding author: M.V. Glagolev, m_glagolev@mail.ru

Цитирование: Glagolev M.V. 2021. Kostychev-Orlov equation and first mathematical models of humus dynamics // Environmental Dynamics and Global Climate Change. V. 12. No. 2. P. 167–187. DOI: <https://doi.org/10.18822/edgcc90695>

This work is a report written at the suggestion of the talented Soviet scientist V.V. Zelenev in 1986–1987, when the author was a 4th year student at the Faculty of Soil Science, M.V. Lomonosov Moscow State University.

The report analyzes the equation proposed at the dawn of soil science by P.A. Kostychev for the maximum level of humus accumulation (and later modified by D.S. Orlov). It is shown that from the point of view of mathematics, the Kostychev equation is meaningless and has no solution at all. Improved by Orlov, it already has solution, but it seems that it still cannot be effectively used. In this regard, various types of those mathematical models of humus dynamics are considered, which were used by specialists in soil science and ecology.

Keywords: humus accumulation, mathematical modeling, partial differential equation, ordinary differential equation.

Данная работа представляет собой материалы доклада¹, подготовленные по предложению талантливого советского ученого В.В. Зеленева в 1986–1987 гг. в бытность автора студентом 4-го курса факультета почвоведения² МГУ им. М.В. Ломоносова.

В докладе приводится анализ уравнения, предложенного на заре почвоведения П.А. Костычевым для максимального уровня накопления гумуса (и в дальнейшем модифицированного Д.С. Орловым). Показано, что с точки зрения математики уравнение Костычева лишено смысла и вообще не имеет решения. Усовершенствованное Орловым, оно уже имеет решения, однако эффективно использоваться, по-видимому, все равно не может. В связи с этим рассматриваются различные типы тех математических моделей динамики гумуса, которые реально использовались специалистами в почвоведении и экологии.

Ключевые слова: накопление гумуса, математическое моделирование, распределенные модели, сосредоточенные модели.

¹ Данный доклад под названием «Об уравнении Костычева–Орлова и современных математических моделях гумусонакопления» был подготовлен для выступления на 3-ей Выездной (Пушинской) зимней школе факультета почвоведения МГУ, прошедшей в 1987 г., но по очевидным причинам выступление автора с таким докладом было невозможно. Публикуемый ныне текст восстановлен нами по сохранившимся наброскам и черновикам. При этом *ссылки и список литературы были оформлены нами* по правилам данного журнала, в частности, одному из издателей пришлось — в тесном контакте с автором — в ряде литературных ссылок добавить конкретные страницы, поскольку в рукописи номера страниц в большинстве случаев указаны не были. Кроме того, рисунки были перерисованы с использованием современных средств, поскольку в «рукописи» были представлены неразумительными набросками от руки на клочках бумаги. — *Примечание издателей (к.б.н. Д.В. Ильясова и М.В. Янина).*

² Параллельно М.В. Глаголев обучался по индивидуальному учебному плану на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова. — *Примечание издателей.*

Я пошел по их стопам..., но они мне показались убогими и лишенными реального значения.

N. Wiener, 1958

Таким образом, гипотеза... оказалась несостоятельной со всех точек зрения, хотя она и пользовалась почти всеобщим признанием на протяжении 20 лет. (Последнее можно объяснить огромным авторитетом автора и отсутствием... чего-либо лучшего.)

Б.А. Воронцов-Вельяминов, 1985

ВВЕДЕНИЕ

Пионеры математического моделирования динамики органического вещества почв

Детищем нового времени явилось довольно широкое проникновение математических методов в почвоведение [Крупеников, 1981, с. 286]. Причем сложность объекта исследования, многочисленность и разнообразие протекающих в почве процессов делают математическое моделирование (MaM)¹ одним из важнейших методов исследования в почвоведении. Наиболее разработаны два подхода MaM в почвоведении: детерминированный и стохастический. Первый ставит целью выяснение и математическое описание физической сущности явлений, например модели различных аспектов переноса в почвах. Второй подход учитывает вероятностный характер изучаемых явлений. При этом не вскрывается их сущность, а отражаются наблюдаемые результаты или строятся прогнозирующие модели по принципу «черного ящика» [Галицкий и др., 1977; Павлова и др., 1977; Куртнер и Чудновский, 1979; Мироненко и Пачепский, 1980; Гончар-Зайкин и др., 1981; Орлов и др., 1987, с. 147–149]². Особое место среди почвенных приложений математики занимает моделирование динамики органического вещества (в частности, гумуса), которому посвящено чрезвычайно много работ — см., например, [Довнар, 1977; Hunt, 1977; Гильманов, 1978; Бондаренко и др., 1981; Bosatta and Ågren, 1985]. И это вполне понятно.

Поскольку гумус является важным фактором почвенного плодородия, количественное описание процессов гумификации растительных остатков и органических удобрений, минерализации гумуса и его динамики в почвах составля-

¹ Галицкий и др. [1977] кроме математического отдельно рассматривают программное моделирование и аналоговое. Это конечно, неправильно — см. «ПРИЛОЖЕНИЕ: Об одной ошибочной классификации типов моделирования».

² В рукописи доклада последняя ссылка выглядела так: «Орлов и др., принята к публикации». Проконсультировавшись с автором, мы установили что это за работа и теперь даем правильную ссылку на нее, поставив конкретные страницы для удобства читателя. — *Примечание издателей.*

ет важную задачу современного почвоведения. Один из перспективных методов решения этой задачи — математическое моделирование. Оно позволяет оценить интенсивность разложения в почве органической массы, образования гумуса и его минерализации, основываясь на различного рода косвенных данных; непосредственное экспериментальное определение этих характеристик трудоемко и методически чрезвычайно сложно [Мамихин и Тихомиров, 1984]. Но когда возник интерес к данному вопросу? Кто же был первым? Пожалуй, прежде всего в памяти всплывает имя Владимира Александровича Костицына.

В.А. Костицын активно участвовал в революционных событиях. В 1905 г. вынужден был уехать в эмиграцию, где долгое время жил в Женеве в те годы, когда там жил В.И. Ленин. В этот период В.А. Костицын был близок к большевикам [Моисеев, 1984, с. 4]. Конечно, как каждый честный советский человек, Владимир Александрович не мог оставаться вдали от Родины в годину суровых испытаний. И происходившее ранее общение с передовыми людьми той эпохи (а, возможно, и с самим Владимиром Ильичом) не могло не способствовать необыкновенному интеллектуальному (и, соответственно, карьерному) взлету Костицына, произошедшему в этот период.

В.А. Костицын вернулся в Россию не позднее 1914 г. и уже в 1917 г. был назначен полкомиссаром полка, а в начале 20-х гг. избирается профессором математики химического факультета МГУ. Одновременно он работает в Главнауке Наркомпроса РСФСР, тесно сотрудничает с В.И. Вернадским (не только в области геофизики и геохимии, но и помогает в решении административных вопросов по управлению Радиевым институтом). С конца 20-х гг. начинается плодотворная и многолетняя работа В.А. Костицына с В. Вольтерра. Постепенно (под влиянием последнего) интересы В.А. Костицына все в большей степени сосредоточиваются на проблемах экологии. В результате он стал первым профессиональным математиком, целиком посвятившим себя развитию математических моделей процессов в биосфере [Моисеев, 1984, с. 4–5, 7]. И, в частности, в [Kostitzin, 1935] им была построена глобальная модель, содержащая 5 переменных: x — массу свободного атмосферного кислорода; y — общую массу CO_2 в атмосфере и в океане; s — общую массу O и C в рассеянных в земной коре мертвых остатках живых существ; v и u — общую массу этих элементов в живущих ныне, соответственно, растениях и животных. Для переменной s Костицын предложил дифференциальное уравнение

$$ds/dt = \alpha_{35} \cdot u + \alpha_{45} \cdot v. \quad (1)$$

Очевидно, что переменная s в значительной мере соответствует массе органического вещества почвы (о чем пишет и сам Костицын, например, определяя член $\alpha_{35} \cdot u$ как «обогащение почвы в результате разложения трупов животных»; аналогично, член $\alpha_{45} \cdot u$ описывает поступление в почву O и C в составе отмирающих частей растений). К сожалению, эта модель «повисла в воздухе».

Действительно, в почвоведении цели моделирования (выступающего как метод научного исследования) состоят в том, чтобы, во-первых, разработать модели, дающие хорошее описание реальных процессов и, во-вторых, по отработанным моделям произвести расчет количественных характеристик, т.е. решить задачу прогноза. Ценность всякой модели определяется степенью ее адекватности реальной действительности и возможностью ее использования для прогнозов и генерации новых идей [Галицкий и др., 1977]. Но в [Kostitzin, 1935] читаем: «Что касается коэффициентов в уравнении... ошибки могли бы оказаться существенными, если бы нас интересовали численные результаты. Однако при низкой точности данных, которыми мы можем располагать, доводить изучение проблемы до численных оценок было бы самообманом». В результате, Костицын не решился дать никаких численных оценок коэффициентов модели, а потому не смог достигнуть ни первой, ни второй цели моделирования — не доказал, что его модель обеспечивает хорошее описание реальных процессов и не решил задачу прогноза. Это в значительной степени обесценивает его модель. Но, более того, даже если бы численные значения параметров были определены, все равно использовать предложенное Костицыным уравнение было бы нельзя, поскольку оно — неверное¹.

¹ В связи с этим я не буду рассматривать остальные уравнения модели Костицына — раз уж самое для нас основное уравнение никуда не годится. Вообще, может показаться странным, что Костицын сделал такую ошибку — забыл о возможности разложения органики. Однако, если посмотреть с, так сказать, общественно-политической точки зрения, ничего удивительного тут нет. К сожалению, я не смог найти подробную биографию Костицына, но из тех скудных сведений, которые сообщает Н.Н. Моисеев [1984, с. 5] («Начало второй мировой войны застало В.А. Костицына в Париже... Умер В.А. Костицын в Париже в 1963 г.») можно с большой вероятностью сделать вывод, что в какой-то момент он эмигрировал, фактически, предал Родину. Естественно, лишенный животворящих корней, любой эмигрант зачахнет и увянет, что для бывшего ученого неизбежно должно выразиться в утере интеллектуального потенциала.

В почве протекают процессы распада и ноообразования гумуса [Довнар, 1977]. Понятно, что если в уравнении для скорости суммарного изменения концентрации органики слагаемое, соответствующее образованию гумуса, будет положительным, то распад гумуса должен описываться членом с противоположным знаком. Однако, как видим, уравнение Костицына подразумевает возможность только накопления (образования) органического вещества почвы, но не его разложения — в это уравнение входят слагаемые только одного и того же знака. К счастью, пионерская работа советского ученого была удачно дополнена другими исследователями.

Многое в этом отношении сделал Г. Иенни [Крупеников, 1981, с. 286], уделявший существенное внимание именно описанию разложения органики. Но, оказывается, это все были последователи, а вот первооткрыватель жил и творил намного раньше...

Орлов [1985] высказывает предположение о том, что впервые количественно решал вопрос о максимальных уровнях накопления гумуса в различных почвах П.А. Костычев. И жалеет по поводу того, что «...почти через 100 лет после работ П.А. Костычева появляются в печати публикации, посвященные математическому моделированию гумусонакопления, в которых даже не упоминаются приоритетные идеи и расчеты П.А. Костычева». Однако, склоняя голову перед первопроходцем, мы не можем не захотеть разобраться: есть ли в математических идеях Костычева что-нибудь замечательное кроме их седой древности.

Поэтому, во-первых, целью моего доклада будет анализ (с чисто математической точки зрения) этих «приоритетных идей и расчетов», призванный ответить на простой вопрос: есть ли в них что-либо разумное или же они не упоминаются современными специалистами просто потому, что представляют собой очевидную ерунду. Забегая вперед, скажу, что поскольку так и оказалось, то, разумеется, было бы нелепо привлекать ваше внимание лишь к этой чепухе, поэтому, во-вторых, я счел необходимым дать краткий обзор современных математических моделей в этой области.

Уравнение Костычева

Поставив задачу оценить предельный уровень накопления органического вещества в почвах, П.А. Костычев пришел к простому выводу о том, что прироста гумуса не будет, если поступление органического вещества равно его разложению; но более важен, по его мнению, другой случай, когда разлагается органического вещества в почве меньше, чем его поступает с

растительными остатками, но и при этом накопление гумуса не может продолжаться бесконечно. По мнению П.А. Костычева, прирост органического вещества прекратится тогда, когда будет соблюдаться равенство¹:

$$0.5A + (0.5)^2A + \dots + (0.5)^{n-1}A = A,$$

где A — ежегодный прирост органического вещества на той же площади (взят условно), n — число лет наблюдения [Орлов, 1985].

К сожалению, мне не довелось познакомиться с этим уравнением непосредственно в первоисточнике, так что остается только поверить, что Орлов воспроизвел это довольно странное уравнение верно. Итак, в дальнейшем будет проанализировано данное уравнение, а также его обобщение, предложенное химиком почв Орловым [1985].

Используемые сокращения

АМУ — аналоговые моделирующие устройства;

МаМ — математическое моделирование;

ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение;

УЧП — уравнение в частных производных;

ЭВМ — электронная вычислительная машина;

ЭЦВМ — электронно-цифровая вычислительная машина.

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ КОСТЫЧЕВА-ОРЛОВА

Анализ уравнения Костычева

Орлов [1985] считает, что одно из частных следствий этого закона заключается в возможности определения возраста почвы, начиная с ее образования и до момента установления равновесия. С математической точки зрения задача заключается в том, чтобы решить уравнение относительно n . Очевидно, что правую и левую части уравнения Костычева мы можем поделить на A . Тогда:

$$0.5 + (0.5)^2 + \dots + (0.5)^{n-1} = 1. \quad (2)$$

Как известно сумма ряда, стоящего в левой части формулы, может быть найдена аналитически. В общем виде (см., например, [Hamming, 1962, §3.2]):

$$\sum_0^m k^x = \frac{k^{m+1} - 1}{k - 1}.$$

¹ О нем Орлов [1985] патетически восклицает: «Думается, что мы вправе и более того обязаны называть это положение как закон Костычева максимального гумусонакопления».

Однако нам нужен ряд, начинающийся не с k^0 , а с k^1 . Поскольку $k^0 = 1$, то

$$\sum_0^m k^x = k^0 + \sum_1^m k^x = 1 + \sum_1^m k^x = \frac{k^{m+1} - 1}{k - 1}.$$

Таким образом,

$$\sum_1^m k^x = \frac{k^{m+1} - 1}{k - 1} - 1 = \frac{k^{m+1} - 1 - (k - 1)}{k - 1} = \frac{k^{m+1} - k}{k - 1}.$$

Если $k < 1$, то удобнее записать формулу в следующем виде:

$$\sum_1^m k^x = \frac{k - k^{m+1}}{1 - k}. \quad (3)$$

В частном случае уравнения Костычева имеем $k = 0.5$, $m = n - 1$. Следовательно

$$\begin{aligned} \sum_1^m k^x &= \sum_1^{n-1} k^x = \frac{k - k^n}{1 - k} = \frac{0.5 - 0.5^n}{1 - 0.5} = \\ &= \frac{0.5 - 0.5^n}{0.5} = 1 - 0.5^{n-1}. \end{aligned}$$

Проверим полученную формулу на нескольких примерах. Пусть $n = 2$, тогда весь ряд состоит лишь из 1 члена (0.5) и, естественно, сумма ряда равна этому члену. И по выведенной выше формуле имеем: $1 - 0.5^{2-1} = 1 - 0.5 = 0.5$. Пусть теперь $n = 3$, тогда ряд содержит 2 члена и их сумма $0.5 + 0.5^2 = 0.5 + 0.25 = 0.75$. И по нашей формуле имеем: $1 - 0.5^{3-1} = 1 - 0.5^2 = 0.75$. Наконец, пусть $n = 4$, тогда в ряду 3 члена, а их сумма $0.5 + 0.5^2 + 0.5^3 = 0.875$. По формуле получаем то же самое: $1 - 0.5^{4-1} = 1 - 0.5^3 = 0.875$. Да, все правильно, формула работает!

Но вывод этой формулы был не самоцелью. Напомню, что задача-максимум: решить уравнение Костычева, т.е. найти из него численное значение n . И так, подставим формулу для суммы ряда в правую часть уравнения (2). Получим:

$$1 - 0.5^{n-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad 0.5^{n-1} = 0.$$

Очевидно, что ни при каком конечном n последнее равенство не выполняется (оно выполняется только при $n = \infty$). В этой связи совершенно непонятно звучит утверждение Орлова [1985] о том, что «приблизительные оценки П.А. Костычева дали для чернозема возраст от 11 000 до 25 000 лет». Почему именно такие значения? Откуда вообще может взяться **разброс** (от 11 до 25 тыс.)? При $n = 11\,000$ последнее равенство, конечно, не выполняется в точности, однако его погрешность составляет весьма малую величину: $0.5^{11000-1} \approx 10^{-3311}$, т.е. практически 0. Но с таким же успехом можно было бы сказать, что «при-

близительная оценка дала возраст 67 лет». Ведь $0.5^{67-1} \approx 0.00000000000000000001$, а это — тоже, практически, 0. По крайней мере на БЭСМ-6 вещественные константы Фортрана, который все мы использовали во время практических занятий по программированию на 2-ом курсе, должны быть (по модулю) больше 0.5^{65} , а число 0.5^{66} будет неотличимо от 0.

Итак, совершенно ясно, что Костычев со своим уравнением — законом максимального гумусонакопления — «сел в лужу» (впрочем, это вполне простительно, учитывая, его происхождение из крепостных дворовых людей помещиков Петровых [Орлов, 1985] и того плачевного положения, в котором пребывало образование в царской России середины XIX в.). А что же современные почвоведы?

Уравнение Костычева-Орлова

Орлов [1985] считает, что «следует заменить величину 0.5 на дифференцированный по зонам коэффициент k , и тогда закон... можно записать в виде: $kA + k^2A + \dots + k^{n-1}A = A$ ». Данный «закон», таким образом, уместно будет назвать **уравнением Костычева-Орлова**. Никаких новых сложностей анализ этого уравнения не содержит. Поскольку в левой части мы опять имеем хорошо известную еще со школы геометрическую прогрессию, то можем воспользоваться формулой (3), в результате чего получим:

$$\frac{k - k^n}{1 - k} = 1 \Rightarrow k - k^n = 1 - k \Rightarrow 2 \cdot k - 1 = k^n \Rightarrow n = \frac{\ln(2 \cdot k - 1)}{\ln(k)}. \quad (4)$$

Отсюда следует, что при $2 \cdot k > 1$ (т.е. при $k > 0.5$) уравнение Костычева-Орлова имеет действительное решение и при том единственное. Однако мне представляется, что уравнение Костычева-Орлова все равно не найдет широкого применения в почвоведении. Действительно, чему равно численное значение k ?

Орлов [1985] учит нас, что k представляет собой «дифференцированный по зонам коэффициент». Но как (конкретно!) рассчитать k в той или иной зоне (т.е. для того или иного зонального типа почв)? Нет ответа. Более того, хочу обратить внимание на одно неприятное свойство коэффициента k : очень небольшому изменению k соответствует огромное изменение n .

Например, для образования плодородной вулканической почвы требуется всего 10–20 лет [Ковда, 1973, с. 254], т.е. в данном случае можно считать, что n не менее 10. Какое значение k соответствует $n = 10$? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно решить уравнение (4) относительно k , т.е. выразить k через n или, иначе

говоря, k — как функцию n (тогда как сейчас мы имеем, наоборот, n как функцию k).

Как известно, далеко не всякое уравнение может быть решено точно. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений, т.е. уравнений, в которых неизвестная находится под знаком трансцендентной функции [Гутер и Резниковский, 1971, с. 34]. Очевидно, что уравнение (4) — трансцендентное, и аналитически в общем виде решить его невозможно (или, по крайней мере, я не знаю, как это сделать).

Однако точное решение уравнения не всегда является необходимым. Задачу отыскания корней уравнения можно считать практически решенной, если мы сумеем определить корни с нужной степенью точности. Методом подбора корней [Гутер и Резниковский, 1971, с. 34, 63] легко найти $k(10) = 0.50049313$. А, как мы видели выше, бесконечно большому количеству лет формирования почвы (начиная с ее образования и до момента установления равновесия, когда поступление органического вещества равно его разложению) соответствует $k(\infty) = 0.5$. Следовательно, всем возможным значениям возраста почвы (сотни, тысячи, десятки тысяч лет [Ковда, 1973, с. 254–266]) соответствуют какие-то значения коэффициента k , заключенные в очень узком интервале: $0.5000 < k < 0.5005$.

Кстати, тот факт, что все корни оказываются весьма близки к 0.5, позволяет дать очень простое **приближенное** аналитическое решение уравнения (4). Для удобства введем новую переменную x , такую, что $k = 0.5 + x$ (т.е. $x = k - 0.5$). Тогда (4) можно переписать в следующем виде:

$$n = \ln(x \cdot 2) / \ln(0.5 + x).$$

Поскольку $0.5 \gg x$, можно считать, что

$$0.5 + x \approx 0.5, \quad (5)$$

следовательно,

$$n \approx [\ln(x) + \ln(2)] / \ln(0.5) = \ln(x) / \ln(0.5) + \ln(2) / \ln(0.5) = \ln(x) / \ln(0.5) - 1.$$

Отсюда

$$\ln(x) / \ln(0.5) \approx n + 1 \Rightarrow \ln(x) \approx (n + 1) \cdot \ln(0.5) \Rightarrow x \approx e^{(n + 1) \cdot \ln(0.5)}.$$

Окончательно (для k) имеем:

$$k \approx 0.5 + e^{(n + 1) \cdot \ln(0.5)} = 0.5 + 0.5^{n + 1} = 0.5 \cdot (1 + 0.5^n). \quad (6)$$

Например, для $n = 10$ получаем: $k \approx 0.5 + e^{(10 + 1) \cdot \ln(0.5)} \approx 0.5004883$, т.е. относительная погрешность определения корня по полученной выше формуле составила $(0.5004931 - 0.5004883) / 0.5004931 \sim 10^{-6}$, т.е. $\sim 10^{-4}\%$. Понятно, что для $n > 10$ точность вычисления

k по приближенной формуле (6) будет еще лучше, поскольку чем больше n , тем меньше x , и, следовательно, тем точнее выполняется приближенное равенство (5) в предположении которого получена формула (6). Теперь, имея эту замечательную формулу, нетрудно будет оценить значения предложенного Орловым коэффициента k для почв принципиально разного возраста.

Еще В.В. Докучаев (1883) установил, что в течение 760 лет на известковых плитах Староладожской крепости образовались почвы, представляющие полный аналог растительно-наземных почв, лежащих на различного рода известковых образованиях [Ковда, 1973, с. 254]. Легко вычислить, что для $n = 760$

$$k \approx 0.5 \underbrace{00\dots00}_{{228} \text{ нулей}} 8.$$

Возраст черноземов по гумусу составляет около 7.5 тыс. лет [Ковда, 1973, с. 254]. Тогда (для $n = 7500$) будем иметь

$$k \approx 0.5 \underbrace{00\dots00}_{{2257} \text{ нулей}} 9.$$

Как видим, предложенный химиком почв Орловым коэффициент, который якобы различается для разных природных зон, на практике всегда оказывается, фактически, равным 0.5. И кому же нужен такой коэффициент? Думается, что никому. Поэтому могу предсказать, что никто его применять не будет. Впрочем, химика почв Орлова извиняет то, что он именно химик, а не математик.

Но экология, по свидетельству Свирежева [1981], представляет собой ту область, куда математические методы проникли наиболее глубоко, настолько, что математическую экологию можно считать одной из ветвей прикладной математики. Понятно, что прикладной математикой должны заниматься не химики (тем более — химики почв), а математики. Поэтому теперь обратимся к моделям, созданным настоящими специалистами.

СОВРЕМЕННЫЕ¹ СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОЧВЕННОЙ ОРГАНИКИ

Построение комплексных имитационных моделей с целью изучения, управления и конструирования экосистем на основе системного подхода в настоящее время выступает как наиболее важная и актуальная задача экологии и смежных естественных наук, включая почвоведение

¹ Напомним, что для автора «современностью» была середина 80-х гг. XX-го в. — *Примечание издателей.*

[Гильманов, 1977]. В последние годы в почвоведении разрабатываются методы электронно-математического моделирования различных почвенных процессов [Ковда, 1973, с. 34]. При построении имитационных моделей сложных динамических систем особо важная роль принадлежит отношениям между переменными, которые выражаются обыкновенными дифференциальными уравнениями или системами таких уравнений. В частности, эти уравнения широко применяются *в моделях с сосредоточенными параметрами*, в которых *переменные состояния изменяются во времени, но не зависят от пространственных координат* [Гильманов, 1977, с. 39] (такие модели также принято называть «точечными» или «нульмерными» [Моисеев, 1984, с. 59]). Для краткости далее я буду использовать термин «сосредоточенные модели».

Поскольку одно и то же явление может быть представлено многими моделями, основанными на разных принципах [Галицкий и др., 1977], то и различных моделей динамики органического вещества создано к настоящему времени изрядное количество. Разумеется, в этом кратком докладе я не смогу не только подробно рассмотреть их все, но даже хотя бы упомянуть². Считаю, что нужно обратить внимание, во-первых, на модели различных классов (чтобы дать представление о разных подходах) и, во-вторых, на ошибки в опубликованных моделях (дабы облегчить путь следующим поколениям — чтобы они не теряли время в тщетных попытках заставить работать неправильную модель или как-то разумно объяснить выдаваемые ею бессмысленные результаты).

Общий вид линейной сосредоточенной модели почвенной системы

Пусть u_i — содержание вещества в i -ом блоке; t — время; a_{ij} — коэффициенты, характеризующие интенсивность выноса (потерю) вещества из i -го блока в j -ый; a_{ji} — коэффициенты, характеризующие интенсивность поступления вещества из j -го в i -ый блок. Перенос вещества (или элемента) в почве может быть описан системой дифференциальных уравнений [Чертов и Прохоров, 1977]. К сожалению, общая форма математической модели Чертова-Прохорова была лишена физического смысла³,

² К тому же, многие публикации, наверное, мне пока просто не встретились, поэтому я знаю далеко не все модели.

³ В [Чертов и Прохоров, 1977] правая часть была записана в виде: $\Sigma(a_{ji}u_j) - \Sigma(a_{ij}u_j)$. Обратим внимание на последний член (ибо ошибка — в нем!). Получается, что интенсивность выноса вещества из i -го блока в j -ый пропорциональна содержанию вещества не в том блоке,

поэтому я сразу запишу исправленный и дополненный вариант уравнений:

$$\frac{du_i}{dt} = b_i + \sum_{j=1}^n (a_{ji} \cdot u_j) - u_i \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij}. \quad (7)$$

где b_i — скорость поступления вещества извне (из источников, которые не могут быть отождествлены ни с одним из блоков рассматриваемой системы). Модели такого типа представляется естественным называть «блочными» или «компарментными» (от англ. «compartment model» [Hunt, 1977]).

Чертов и Прохоров [1977] рассматривают 8 блоков ($n = 8$): 1) аккумулятивные горизонты почвы, 2) элювиальные горизонты (представлены не везде), 3) иллювиально-метаморфические горизонты, 4) подстилающая порода, 5) растительность и другие организмы, 6) атмосфера, 7) человек, 8) смежные почвенные системы. При этом блоки №№ 4-8 считались «внешними» по отношению к почве, в связи с чем необходимость в каком-либо описании поступления вещества еще откуда-то «извне» отпадала и принималось $b_i = 0$. Другие исследователи, принимая общую идею модели — о переходе (по простому — линейному — закону) вещества из одних блоков в другие, рассматривают

откуда оно выносится, а в том, в который оно поступает (и чем больше там — в j -ом блоке — вещества, тем сильнее оно будет «высасываться» из i -го блока). Именно эта абсурдная гипотеза о законе выноса вещества приводит модель Чертова-Прохорова к полному фиаско. Действительно, рассмотрим простейший пример — систему из 2 блоков. Пусть u_1 — содержание гумуса в почве, а u_2 — органическое вещество растений и других организмов. Уравнения этой «двух-блочной» модели, представленной в форме Чертова-Прохорова, таковы: $du_1/dt = a_{11} \cdot u_1 + a_{21} \cdot u_2 - a_{11} \cdot u_1 - a_{12} \cdot u_2$, $du_2/dt = a_{12} \cdot u_1 + a_{22} \cdot u_2 - a_{21} \cdot u_1 - a_{22} \cdot u_2$. Или, после приведения подобных членов: $du_1/dt = a_{21} \cdot u_2 - a_{12} \cdot u_2$, $du_2/dt = a_{12} \cdot u_1 - a_{21} \cdot u_1$. Предположим, во-первых, что растения посадили на почву, в которой гумуса практически нет, например, на чистый песок. С математической точки зрения, это будет означать, что в начальный момент времени $u_1 = 0$. И, во-вторых, организуем эксперимент так, чтобы не было поступления органического вещества из растений в гумус. Математически это будет означать, что $a_{21} = 0$. Тогда будем иметь простое уравнение для динамики содержания гумуса в почве: $du_1/dt = -a_{12} \cdot u_2$. Поскольку какое-то (значительное!) количество органики в растениях есть, то член $a_{12} \cdot u_2 > 0$ и, следовательно, $du_1/dt < 0$, т.е. концентрация гумуса будет падать. Но, как мы помним, в начальный момент времени $u_1 = 0$, поэтому, падая, концентрация гумуса в следующей момент времени станет... отрицательной. Бессмысленность модели Чертова-Прохорова доказана! Тут же замечу, что в исправленной модели (7) скорость падения концентрации гумуса пропорциональна самой концентрации гумуса, и раз, по условию, эта концентрация в нашем примере нулевая, то и скорость уменьшения ее тоже будет равна нулю. Ноль останется нулем! Все правильно!!!

иные, иногда весьма сложные, системы блоков: см., например, [Hunt, 1977; Bolin, 1981; Emanuel et al., 1981; Van Veen and Paul, 1981; Машихин и Тихомиров, 1984]. Но начнем мы с очень простой модели.

Модель Довнара

В [Довнар, 1977] предпринята попытка количественного описания динамики гумуса в дерново-подзолистой почве (характеризующейся невысоким содержанием гумусовых веществ, сосредоточенных в пахотном горизонте) при помощи простейшей модели, учитывающей процессы накопления и распада органики.

Пусть A — поступающее в почву органическое вещество; β — коэффициент его гумификации; λ — коэффициент распада гумуса. В предлагаемой модели β и относительная скорость распада гумуса принимаются независимыми от содержания гумуса в почве и количества поступающих органических остатков. Модель адаптируется к различным почвенно-климатическим условиям и качественному составу поступающего в почву органического вещества, посредством изменения величин коэффициентов λ и β , которые должны определяться экспериментально¹ [Довнар, 1977].

Итоговое уравнение, позволяющее рассчитывать содержание гумуса в почве (Γ) на любой наперед заданный год, выглядит следующим образом:

$$\Gamma = \Gamma_0 \cdot e^{-\lambda t} + (1 - e^{-\lambda t}) \cdot A \cdot \beta / \lambda, \quad (8)$$

где Γ_0 — исходное содержание гумуса в почве; $e \approx 2.72$ — основание натурального логарифма; t — продолжительность времени в годах [Довнар, 1977].

На первый взгляд, это уравнение не похоже на рассмотренное выше общее уравнение блоковых моделей (7). Однако, хотя автор и не пишет об этом, но совершенно очевидно, что данное уравнение не «упало с потолка», а было получено в результате решения дифференциального уравнения простой блочной модели. Действительно, построим модель типа (7) для углерода в двух блоках: в почве (где, будем считать, он входит, в основном, в состав гумуса) и в атмосфере (в основном, в составе CO_2):

$$\begin{aligned} du_1/dt &= b_1 + a_{21} \cdot u_2 - a_{12} \cdot u_1, \\ du_2/dt &= b_2 + a_{12} \cdot u_1 - a_{21} \cdot u_2, \end{aligned}$$

здесь u_1 и u_2 — содержание углерода, соответственно, в почве (в гумусе) и в атмосфере

¹ Наибольшая аппроксимация модели к происходящим в почве процессам распада и биосинтеза гумуса достигается за промежуток времени от нескольких лет до нескольких десятков лет [Довнар, 1977].

(в CO_2); b_1 — скорость поступления в почву углерода (в составе органических веществ растительного и животного происхождения); a_{12} — коэффициент, характеризующий интенсивность выноса углерода из почвы в атмосферу (в результате разложения гумуса); поскольку нет никакого значимого процесса, обеспечивающего перенос углерода из атмосферного CO_2 в почвенный гумус, то коэффициентом a_{21} , характеризующим интенсивность такого переноса, можно пренебречь ($a_{21} = 0$). Тогда первое уравнение системы (а для описания динамики гумуса только оно-то нам и нужно) примет более простой вид:

$$du_1/dt = b_1 - a_{12} \cdot u_1.$$

Пусть k — коэффициент пересчета содержания углерода в почве на содержание в ней гумуса (т.е. $k = \Gamma/u_1$). Домножив последнее дифференциальное уравнение на k и обозначив $k \cdot b_1$ через $A \cdot \beta$, а a_{12} — через λ , получим:

$$d\Gamma/dt = A \cdot \beta - \lambda \cdot \Gamma.$$

С помощью методов аналитического интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [Бронштейн и Семендяев, 1986, с. 307–308]) легко показать, что формула (8) как раз будет решением полученного уравнения при начальном условии $\Gamma(0) = \Gamma_0$ и постоянных значениях A , β , λ .

Понятно, что такая простая модель будет чрезвычайно грубой и вряд ли может дать что-то полезное для понимания реальных природных процессов. Поэтому рассмотрим теперь существенно более сложную модель.

7-компарментная модель цикла углерода

Схема модели [Bolin, 1981] представлена на рис. 1. Всего в модели 7 блоков (резервуаров углерода), и, следовательно, 7 переменных состояния: количество углерода, соответственно, в атмосфере (N_a), в составе короткоживущей (N_b) и долгоживущей биоты (N_w), в почве в составе гумуса (N_h) и в иных почвенных резервуарах (N_s), а также в глубоких (N_d) и в поверхностных¹ слоях океана (N_m). Какой-либо резервуар i связан с резервуаром j потоком F_{ij} . Почти все потоки имеют вид $F_{ij} = k_{ij} \cdot N_i = k_{ij} \cdot (N_{i0} + n_i) = F_{i0} \cdot (1 + n_i/N_{i0})$, где k_{ij} — коэффициент обмена по кинетике 1-го порядка, n_i — отклонение от стационарного значения для резервуара i ; подстрочным индексом «0» помечены соответствующие значения в стационарном состоянии. В своей работе автор приводит как уравнения, так и значения

¹ «Слой перемешивания» (mixed layer of the ocean [Bolin, 1981]).

параметров (или хотя бы формулы, позволяющие вычислить их). В силу тривиальности этих уравнений я не буду их рассматривать, за исключением двух неочевидных моментов.

Во-первых, поток из атмосферы в короткоживущую биоту (фотосинтез) зависит не только от n_a но и от n_b :

$$F_{ab} = F_{ab0} \cdot (1 + \beta_a \cdot n_a/N_{a0} + \beta_b \cdot n_b/N_{b0}), \quad (9)$$

во-вторых, поток из океана (т.е. из его верхнего слоя) в атмосферу задается формулой $F_{ma} = k_{am} \cdot (N_{a0} + \xi \cdot N_{a0} \cdot n_m/N_{m0})$, где $\xi = 10$ [Bolin, 1981].

Среди прочего, данная модель использовалась для прогнозов цикла углерода в условиях возможного изменения климата. В частности, эмиссия CO_2 в атмосферу задавалась по экспоненциальному закону. Т.е. в обозначениях системы (7) источниковый член для уравнения атмосферного углерода задавался в виде $b_a = \gamma_0 \cdot \exp(\alpha \cdot t)$, где $\alpha = 0.03$ 1/год. Кроме того, в исходную модель были добавлены периодические изменения температуры поверхностных вод океана [Bolin, 1981]. К сожалению, данная модель не лишена бросающихся в глаза недостатков. Во-первых, поскольку фотосинтетический поток из атмосферы идет только в «короткоживущую биоту», то, очевидно, последняя представляет собой растения (или части растений, содержащие хлорофилл). Но что за бездыханная «долгоживущая биота» — что это за биота, которая не производит CO_2 ? Во-вторых, в реальности гумус и иной углерод почвы в результате эрозии может смываться в реки и далее выноситься в моря (океан). Но таких потоков (из «гумуса» и «почвы» в «слой перемешивания океана») в модели нет.

Однако это все — частные недостатки, которые могут быть легко ликвидированы после небольшой чисто технической доработки модели (совсем несложно добавить отсутствующие стрелочки, чуть сложнее, но тоже вполне возможно, выписать формулы для соответствующих потоков и задать — на основе литературных данных — численные значения входящих в них кинетических параметров). Но теперь, когда мы рассмотрели уже несколько компарментных моделей, становится очевидным, что **модели такого типа имеют следующий существенный недостаток**. В реальности все процессы происходят в пространстве, и поэтому их протекание может существенно различаться в разных точках пространства. Но **в модели понятие пространства отсутствует, т.е. как бы считается, что в каждом блоке (например, в почве) происходит мгновенное и полное перемешивание поступающего туда вещества**. Если не выходить за рамки рассма-

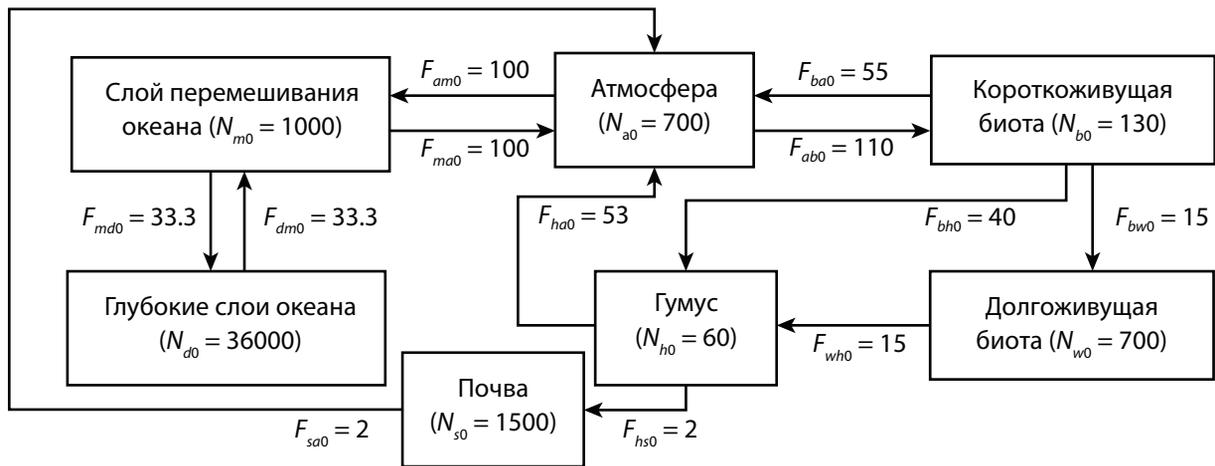


Рис. 1. Блоковая диаграмма модели цикла углерода Volin [1981].

Объемы резервуаров углерода выражены в Гт, а потоки между ними — в Гт/год [Volin, 1981] (1 Гт = 10^9 т). Поскольку приведены числовые значения для стационарного состояния, то и объемы резервуаров, и потоки помечены подстрочным индексом «0».

триваемого типа моделей, то отчасти решить эту проблему можно, разбивая исходный блок на несколько блоков, соответствующих разным пространственным частям исходного блока (при этом вместо одной переменной, соответствовавшей содержанию вещества в исходном блоке, появится несколько новых переменных, описывающих содержание вещества в его разных пространственных частях).

В принципе, зачатки этого подхода видны уже в только что рассмотренной модели Volin [1981]: океан был разбит (по вертикали) на 2 блока: поверхностные и глубокие воды. Однако тут возникает новый вопрос: на сколько блоков надо разделить исходный блок для получения реалистичного описания? Полностью проблема пространственного распределения решается в рамках иного класса моделей (более реалистичных), а именно — в пространственно-распределенных моделях, описываемых уравнениями в частных производных. Такие модели я рассмотрю ниже, а сейчас коснусь одной из моделей типа (7), в которой почва была разделена на 4 слоя (подстилка + еще 3 слоя).

Подмодель разложения в модели ELM

Рассматриваемая ниже компартментная модель является частью (подмоделью) ELM — модели экосистемного уровня. Подмодель разложения была разработана для описания как динамики организмов, разрушающих сложную органику, так и динамики питательных субстратов для этих организмов. Организмы не разделяются по видам, но отдельно рассматриваются активные и неактивные организмы (различающиеся скоростями дыхания и отмирания; кроме того, лишь активные организмы

могут потреблять субстраты). Субстраты в модели представлены гумусом, экскрементами, и останками живых организмов. За исключением гумуса, каждый из перечисленных субстратов подразделялся на две фракции: быстро и медленно разлагающегося материала. Доли этих фракций в каждом субстрате вычисляются в зависимости от начального содержания азота в нем. Но блоки в модели выделены не только в соответствии с количеством разных субстратов, их фракций и состоянием организмов. Также введено разделение по глубине (например, гумус в почвенном слое 0–4 см — это один блок, а гумус в слое 4–15 см — другой). Это необходимо в связи с тем, что наиболее важные управляющие факторы внешней среды (температура и влажность почвы) изменяются с глубиной [Hunt, 1977, 1978]. Все блоки подмодели разложения перечислены в табл., а общая структура потоков показана на рис. 2.

Содержание азота, потоки тепла и влаги рассчитываются другими подмоделями в рамках ELM. Также при помощи соответствующих подмоделей (продуцентов и консументов) рассчитываются «внешние» входные (в блоки подмодели разложения) потоки, т.е. b_i в ур. (7). Предсказания модели сравнивались с экспериментальными данными. При этом оказалось, что выделение CO_2 и разложение подстилки прогнозируются моделью достаточно хорошо, но активная биомасса (экспериментально оценивавшаяся по АТФ) — плохо [Hunt, 1977].

Учет влияния факторов внешней среды

Экосистемы функционируют в меняющихся условиях среды, что является одной из ос-

новых причин динамичности их внутренних процессов [Гильманов, 1978, с. 91]. В моделях, описывающих динамику почвенного органического вещества, общим подходом, позволяющим учесть влияние k факторов внешней среды, считается следующий. Определим множители $0 \leq \phi^k \leq 1$, каждый из которых зависит от одного фактора среды, причем $\phi^k = 1$ при оптимальном значении данного фактора и ϕ^k может падать до 0 в реальных (не слишком благоприятных) условиях. Совокупное действие факторов описывается посредством перемножения всех ϕ^k [Van Veen and Paul, 1981]. Рассмотрим для определенности влияние только температуры (T) и влажности (W). Тогда коэффициенты a_{ij} в (7) следует представить в виде: $a_{ij} = \phi_{ij}^T(T) \cdot \phi_{ij}^W(W) \cdot a_{ij}^0 = \Phi_{ij} a_{ij}^0$, где a_{ij}^0 — значения соответствующих коэффициентов при оптимальной температуре и влажности (т.е. при $\phi_{ij}^T = \phi_{ij}^W = 1$).

Очевидно, что раз возникает понятие об оптимальном значении фактора, то зависимость ϕ^k от значений соответствующего фактора, скорее всего, будет иметь колоколообразный вид. Выбор подходящей аналитической формулы, адекватно описывающей зависимость такого вида, будет определяться конкретными экспериментальными данными и их погрешностью. С математической точки зрения данная задача не представляет особого интереса (и вообще лежит в стороне от рассматриваемых здесь вопросов построения моделей динамики почвенной органики), поэтому затрагивать ее я не буду.

Существует и другой подход к учету влияния факторов внешней среды: берется не произведение индивидуальных множителей, а наименьший из них. Возможен и комбинированный подход. Так в модели NCSOIL сначала по кинетике 1-го порядка рассчитываются потенциально возможные скорости разложения разных типов органики в данных гидротермических условиях, и при этом $\Phi_{ij} = \min(\phi_{ij}^T, \phi_{ij}^W)$.

А реально достижимые («актуальные») скорости в дальнейшем вычисляются путем домножения потенциальных на фактор ϕ^N , зависящий от содержания азота (правда, в отличие от сказанного выше, последний может принимать значения вплоть до 1.1, а не до 1.0) [Molina et al., 1983].

Нелинейные модели

В общем случае, с течением времени изменяется не только состав внешних факторов среды и структура их воздействий на экосистему, но изменяются состав, свойства и внутренняя структура экосистемы; меняются и обратные воздействия экосистемы на среду. Реакции экосистемы на воздействия окружающей среды часто отличаются задержками, кумулятивными или пороговыми эффектами [Гильманов, 1978, с. 91]. Понятно, что многое из перечисленного принципиально невозможно описать в рамках рассматривавшегося выше линейного подхода (например, это относится к пороговым эффектам, а также к изменениям состава, структуры и свойств экосистемы, если эти изменения происходят не принудительно в наперед заданный момент времени, а вызываются текущим состоянием самой экосистемы — значениями переменных состояния).

Поэтому функции, определяющие эти изменения (законы поведения экосистемы), как правило нелинейны [Гильманов, 1978, с. 91]. В связи с этим, естественным этапом развития моделей динамики почвенной органики явился переход к нелинейным моделям, при том, что общая логика балансового подхода компартментных моделей осталась прежней: скорость изменения количества вещества в каждом блоке складывается из положительных потоков, обеспечивающих поступление данного вещества в блок, и отрицательных потоков, ответственных за удаление вещества из рассматриваемого блока. Но величины потоков

Таблица. Выделение блоков подмодели разложения (в модели ELM).

По веществам или организмам		По глубине			
		подстилка	0–4 см	4–15 см	15–60 см
Экскременты	Легкоразлагаемые	+	-	-	-
	Трудноразлагаемые	+	-	-	-
Иная органика	Легкоразлагаемая	+	+	+	+
	Трудноразлагаемая	+	+	+	+
	Гумус	-	+	+	+
Организмы-деструкторы	Активные	+	+	+	+
	Неактивные	+	+	+	+

*Примечание: «+» означает, что такой блок в модели есть; «-» — такого блока нет

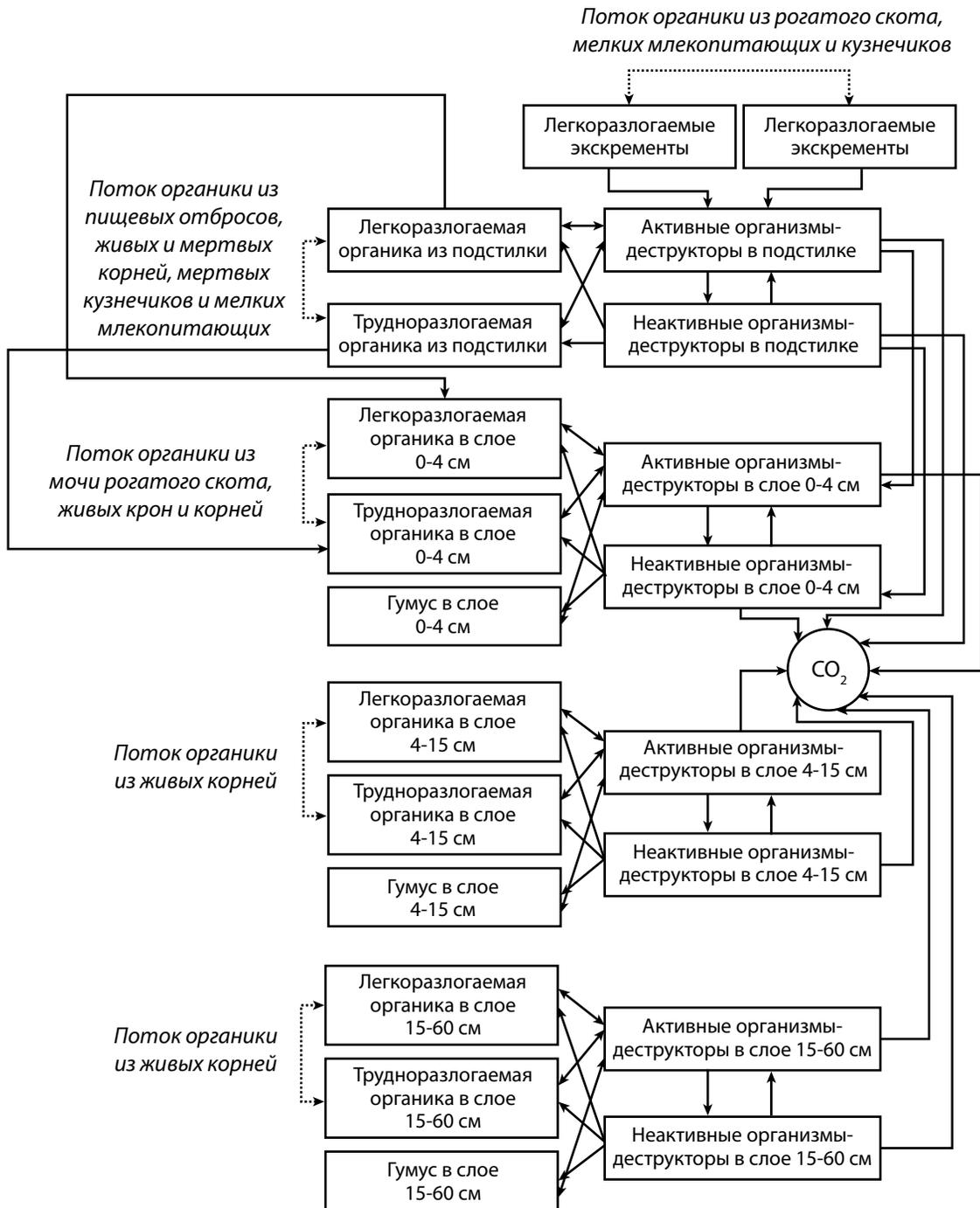


Рис. 2. Блочная диаграмма подмодели разложения (в модели ELM).

Стрелки из блоков организмов в блоки органики отражают потоки органического вещества в результате гибели организмов. Стрелки из блоков органики подстилки в соответствующие блоки органики в слое 0-4 см отражают потоки, обусловленные механическими процессами перемещения вещества, а стрелки из лабильной органики каждого почвенного слоя в аналогичный блок нижележащего слоя отражают потоки, вызванные переносом растворенного вещества с водой [Hunt, 1977].

уже не обязательно линейны — теперь они могут зависеть от концентраций рассматриваемых веществ нелинейным образом. С математической точки зрения сказанное означает, что в нелинейных блочных моделях коэффициенты a_{ij} и a_{ji} в ур. (7) становятся функциями

ми u_1, u_2, \dots, u_n : $a_{ij} = f_{ij}(u_1, u_2, \dots, u_n) = f_{ij}(\mathbf{u})$, $a_{ji} = f_{ji}(u_1, u_2, \dots, u_n) = f_{ji}(\mathbf{u})$.

Вообще говоря, рассмотренная выше 7-компарментная модель цикла углерода исходно была нелинейной — поток из атмосферы в короткоживущую биоту (фотосинтез)

изначально выражался степенным законом: $F_{ab} = F_{ab0} \cdot (N_a/N_{a0})^{\beta_a} \cdot (N_b/N_{b0})^{\beta_b}$. Но в дальнейшем была произведена линеаризация функции $F_{ab}(N_a, N_b)$ путем ее разложение в ряд по N_a и N_b с отбрасыванием членов степени выше первой. В результате и была получена линейная формула (9), а т.к. все остальные потоки в модели исходно уже были линейными, то и вся модель стала линейной [Bolin, 1981]. Но сейчас мы рассмотрим пример действительно нелинейной модели, предложенной Бондаренко и др. [1981].

В этой модели каждая форма органического вещества (неразложившиеся остатки растений и животных предыдущих сроков поступления, а также первичные продукты их разложения; гумус; свежие корневые и пожнивные остатки и остатки зоонаселения; органические удобрения и продукты метаболизма почвенной флоры и фауны) разбивается на 3 группы: S_1 — низкомолекулярные вещества, легко ассимилируемые микроорганизмами; S_3 — высокомолекулярные соединения, непосредственно не потребляемые микробами; S_2 — продукты разложения S_3 , доступные популяции микроорганизмов. Микробы разделены на две группы: x_2 — биомасса микроорганизмов, способная синтезировать гидролитический экзофермент E (для расщепления S_3 до S_2) и x_1 — подобным свойством не обладающая [Бондаренко и др., 1981].

Описанная схема совместного роста групп микроорганизмов на субстратах S_1 и S_2 с разложением S_3 математически выражена следующей системой дифференциальных уравнений:

$$dx_1/dt = (M_{11} + M_{12}) \cdot x_1 - \gamma_{11} \cdot x_1^2 - \gamma_{12} \cdot x_1 \cdot x_2,$$

$$dx_2/dt = (M_{21} + M_{22}) \cdot x_2 - \gamma_{22} \cdot x_2^2 - \gamma_{21} \cdot x_1 \cdot x_2,$$

$$dE/dt = l \cdot (M_{21} + M_{22}) \cdot x_2 - k \cdot E,$$

$$dS_1/dt = -(M_{11} \cdot x_1/y_{11} + M_{21} \cdot x_2/y_{21}),$$

$$dS_2/dt = -(M_{12} \cdot x_1/y_{12} + M_{22} \cdot x_2/y_{22}) + r \cdot E \cdot S_3 / (k_M + S_3),$$

$$dS_3/dt = -r \cdot E \cdot S_3 / (k_M + S_3)$$

где

$$M_{11} = \frac{\mu_{11} \cdot S_1}{(k_{11} + S_1)}, \quad M_{12} = \frac{\mu_{12} \cdot S_2}{(k_{12} + S_2)} \cdot \frac{k_{11}}{(k_{11} + S_1)},$$

$$M_{21} = \frac{\mu_{21} \cdot S_1}{(k_{21} + S_1)}, \quad M_{22} = \frac{\mu_{22} \cdot S_2}{(k_{22} + S_2)} \cdot \frac{k_{21}}{(k_{21} + S_1)}.$$

Здесь μ_{ij} и k_{ij} — максимальная удельная скорость роста и константа¹ скорости роста микробов x_i на субстрате S_j ; γ_{ij} — коэффициент конкуренции; l и k — константы скоростей наработки и инактивации экзофермента E ;

¹ В микробиологии ее принято называть «константой насыщения» [Pirt, 1975].

y_{ij} — коэффициент утилизации² микробами x_i субстрата S_j ; k_M — константа Михаэлиса для реакции расщепления S_3 ; r — константа скорости распада фермент-субстратного комплекса [Бондаренко и др., 1981].

К сожалению, эта модель, вероятно, не сможет хорошо описать динамику гумуса (по крайней мере, на достаточно больших промежутках времени). Действительно, согласно последнему дифференциальному уравнению, высокомолекулярные соединения могут только разрушаться, но синтез гумуса в модели не предусмотрен. Впрочем, ввести его в модель не представляет никакой сложности. Более того, Бондаренко и др. [1981] приводят еще одну модель, где гумификация имеет место. Однако, поскольку их «модель с гумификацией» — линейная, то я рассматривать ее в данном разделе³ не буду.

Конечно, существуют и другие нелинейные модели динамики почвенного органического вещества. Так, в модели Коновалова и др. [1985], также построенной на основе баланса углерода, выделены специфические и неспецифические гумусовые соединения, растительные остатки и органические удобрения. Почвенный ценоз представлен сапрофитами, сапрофагами и биофагами. Удельные скорости процессов трансформации определяются не только через осредненные параметры, но и *нелинейно зависят от количества гумуса*. Модель позволяет распределять ресурс органических удобрений по полям, добиваясь максимальной суммарной емкости поглощения почвы. При этом обеспечивается постепенное улучшение окультуренности полей, бездефицитный баланс гумуса на каждом поле или, если это невозможно, минимальная средневзвешенная скорость падения емкости поглощения. Предусмотрено ограничение разовых доз удобрений под ряд культур [Коновалов и др., 1985].

РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ МОДЕЛИ

Во многих задачах системного моделирования переменные состояния, характеризующие свойства элементов системы-оригинала, представляют собой функции не только времени, но и других, например пространствен-

² В микробиологии его принято называть «экономическим коэффициентом» [Pirt, 1975].

³ А поскольку она ничем существенным не отличается от уже рассмотренных выше линейных компартментных моделей, то и в других разделах не имеет смысла ее подробно описывать (заинтересованным читателям следует обратиться непосредственно к первоисточнику).

ных, координат. Такие модели называются моделями с распределенными параметрами (в противоположность моделям с сосредоточенными параметрами), а в качестве математических соотношений, связывающих переменные модели, выступают дифференциальные уравнения в частных производных с соответствующими дополнительными условиями [Гильманов, 1977, с. 40–41]. Для краткости далее я буду использовать термин «**распределенные модели**». Эти модели принято классифицировать в соответствии с размерностью пространства.

Установилась определенная терминология. Трехмерными называют все те модели, в которых фазовые переменные зависят от всех пространственных координат. Соответственно определяются и понятия двумерной и одномерной моделей [Моисеев, 1984, с. 88]. Как правило, эта терминология применяется для математических моделей, описывающих процессы в **физическом** пространстве. Однако ниже (в разд. «Пример распределенной модели в абстрактном пространстве») мы увидим, что фазовые переменные модели могут зависеть от независимых переменных, не являющихся координатами физического пространства. В этом случае возможны не только трехмерные модели, но и модели большей размерности. Тем не менее здесь я ограничусь лишь примерами одномерных моделей (как в физическом, так и в некотором абстрактном пространстве — пространстве «качества органики»).

Общий вид распределенной (по физическому пространству) модели почвенного профиля

Гильманов [1977] исходит из возможности охарактеризовать почвенный профиль совокупностью функций $u_1(z, t), \dots, u_n(z, t)$, описывающих макроскопические свойства почвенной массы. С математической точки зрения эти функции должны быть определены для времени ($0 \leq t \leq T$) и глубины ($0 \leq z \leq z_N$), быть непрерывными, дифференцируемыми по времени и дважды дифференцируемыми по глубине.

Для определения функций u_i используются дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие изменения соответствующих свойств почвенного профиля по глубине и во времени. Обозначив через Q_i суммарный поток субстанции (вещества или энергии), связанной со свойством u_i , а через S_i — функцию распределения по профилю почвы суммарного источника (стока) для этой субстанции, можно записать локальное диф-

ференциальное уравнение сохранения¹ для субстанции i в виде:

$$\partial u_i / \partial t = -\partial Q_i / \partial z + S_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Для такого уравнения формулируются начальные условия:

$$u_i(z, 0) = f_i(z) \quad (11)$$

и граничные условия:

$$L_i(u_i(0, t), Q_i, \dots) = 0, R_i(u_i(z_N, t), Q_i, \dots) = 0. \quad (12)$$

Функции Q_i, S_i, L_i, R_i могут зависеть не только от t, z и u_i , но и от других переменных состояния u_j ($j \neq i$). Переменными состояниями могут быть, например, влажность и температура почвы, концентрации O_2 и CO_2 в почвенном воздухе, биомассы разных групп почвенных организмов, а также, конечно, концентрации различных фракций органического вещества и других веществ [Гильманов, 1977].

Модель круговорота воды и углерода в травяных экосистемах

Гильманов [1978, с. 97–162] предложил подробную математическую модель, в которой изменение количества почвенного гумуса характеризуется уравнением

$$\partial HUM / \partial t = RFALL(z, t) + LDF(z) \cdot LITH(t) - HUMM(z, t) \quad (13)$$

с начальным условием

$$HUM(z, 0) = HUM_0(z). \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} HUMM(z, t) &= CMH(z) \cdot HUM(z, t); \\ LITH(t) &= CLH \cdot LIT(t), \\ RFALL(z, t) &= CRF(z) \cdot R(z, t), \end{aligned} \quad (15)$$

где CLH — коэффициент гумификации подстилки; CMH — функция распределения коэффициента минерализации гумуса по глубине; $CRF(z)$ — плотность распределения коэффициента опада корней по глубине; HUM ($гСВ \cdot м^{-2} \cdot см^{-1}$) — плотность распределения почвенного органического вещества по глубине z в момент времени t ; $LDF(z)$ — функция плотности распределения поступления органического вещества из подстилки, удовлетворяющая условию нормировки:

$$\int_0^{z_N} LDF(z) dz = 1, \quad LDF(z) \geq 0;$$

¹ При этом Гильманов [1977] зачем-то делает ненужное уточнение: «в слое почвенного профиля $[z, z + dz]$ ». Совершенно ясно, что записанное уравнение действует во всем профиле $[0, z_N]$, а не только в абстрактном бесконечно тонком слое dz .

LIT (гСВ/м²) — запас органического вещества в подстилке; $LITH(t)$ — скорость гумификации подстилки; R (гСВ·м⁻²·см⁻¹) — функция плотности распределения живой подземной фитомассы по глубине почвы z в момент времени t , по определению этой функции

масса корней в слое $[z, z + \Delta z]$ в момент времени $t = \int_z^{z+\Delta z} R(z, t) dz$;

$RFALL(z, t)$ — плотность распределения отмирания (опада) корней [Гильманов, 1978, с. 104, 105, 137, 141, 145]. Как видим, Гильманов не для всех величин дает размерность, и можно подумать, что многие из них безразмерны. Это, конечно, не так. Если принять, что $[t] = \text{сут.}$, то легко установить, что $[CLH] = [CMH] = [CRF] = 1/\text{сут.}$; $[HUMM] = \text{гСВ}/(\text{м}^2 \cdot \text{см} \cdot \text{сут.})$; $[LDF] = 1/\text{см}$; $[LITH] = \text{гСВ}/(\text{м}^2 \cdot \text{сут.})$; $[RFALL] = \text{гСВ}/(\text{м}^2 \cdot \text{см} \cdot \text{сут.})$.

На первый взгляд может показаться, что уравнение (13) не соответствует общей форме (10). Сравнивая (10) и (13), видим, что в (13) нет члена $\partial Q_i / \partial z$, а вся правая часть в (13) — это член S_i в (10). Однако с математической точки зрения это лишь означает, что $\partial Q_i / \partial z = 0$, т.е. $Q_i = \text{const}$. По физическому смыслу это соответствует тому, что поток субстанции не меняется с глубиной. Причем, в данном конкретном случае можно пойти еще дальше: поскольку рассматриваемой субстанцией является гумус, а на достаточно большой глубине (в самом низу почвенного профиля), очевидно, потока гумуса практически нет, значит, раз поток должен быть постоянным, нет его и вообще во всем профиле, т.е. $Q_i = 0$. Иначе говоря, в модели Гильманова предполагается отсутствие вертикального переноса гумусовых веществ¹.

¹ Согласно схеме, предложенной проф. МГУ В.В. Геммерлингом, гуминовые вещества подразделяются на грубые дисперсии (представленные гумусовыми углями), коллоидные системы (гуминовые кислоты, фульвокислоты) и молекулярные дисперсии. От размеров и конфигурации частиц гумусовых веществ зависят, в частности, такие их свойства, как растворимость и способность к миграции. Как показал А.Д. Фокин, в профиле дерново-подзолистой почвы железо активно мигрирует в форме комплексных соединений с фульвокислотами. Гуминовые кислоты, в отличие от фульвокислот, не растворимы в воде [Орлов, 1985а, с. 223, 261]. Но раз фульвокислоты растворимы (и, судя по всему, молекулярные дисперсии также растворимы), то уже нельзя говорить об отсутствии переноса гумусовых веществ.

Более того, в конце XIX в. Г. Густавсон указывал, что железо и алюминий образуют в почвах своеобразные гуматы. В настоящее время установлено, что гумусовые вещества образуют соли и комплексные соединения не только с Fe и Al, но также с Ca, Mg,

Таким образом, казалось бы, уравнение (13) должно рассматриваться не как «настоящее» уравнение в частных производных, а, фактически, как обыкновенное дифференциальное уравнение, коэффициенты которого просто являются функциями пространственной координаты (глубины). Формально это действительно так. Кстати, Гильманов [1978, с. 144-145] для единственности решения задачи снабжает уравнение (13) **только** начальным условием (14), как это имело бы место в случае задачи Коши для ОДУ. Это начальное условие вполне соответствует начальному условию (11) для (10). Но для (13) не ставятся какие-либо граничные условия — условия такого вида, как (12).

Однако если рассмотреть не одно лишь «гумусное» уравнение, а всю модель Гильманова [1978, с. 97-162] целиком (а она содержит 9 **взаимосвязанных** дифференциальных уравнений для основных переменных состояния², а также множество вспомогательных соотношений), то обнаружится, что в нее входят и «настоящие» уравнения в частных производных, содержащие и производную по времени, и производную по пространству. А от решений этих уравнений оказываются зависящими параметры уравнений типа (13). Приведу конкретный пример.

В (15) входила функция плотности распределения корней по глубине (R). Динамика R в свою очередь описывается уравнением

$$\partial R / \partial t = RAP(z, t) - RRESP(z, t) - RFALL(z, t) \quad (16)$$

с начальным условием

$$R(z, 0) = R_0(z),$$

здесь $RAP(z, t)$ — плотность распределения скорости ассимиляции корней. Для количественной характеристики функции RAP выдвигается следующая гипотеза: органическое вещество, поступающее на прирост корней за

Na, K и переходными металлами. Глиногумусовые комплексы групп монтмориллонита, гидрослюд, каолинита и других алюмосиликатов могут находиться в почве в виде свободных коллоидных частиц [Орлов, 1985а, с. 256, 258, 263]. Таким образом, предположение о неподвижности гумуса, лежащее в основе модели Гильманова, представляется не слишком реалистичным. Вследствие этого я не буду рассматривать всю модель подробно, ибо сейчас она, по видимому, представляет лишь исторический интерес.

² Кроме упомянутых выше HUM , LIT и R переменными состояниями в модели являются: G — запас зеленой фитомассы; GW — запас свободной воды на поверхности зеленых органов и воды, поглощенной мертвыми частями травостоя (ветошью); SD — запас ветоши; SW — запас свободной воды на поверхности почвы; T — температура почвы; W — объемная влажность почвы [Гильманов, 1978, с. 104–105].

1 сут., распределяется по слоям почвы в соответствии с водно-тепловыми условиями роста корней, задаваемыми функциями $RWF(\eta)$ и $RTF(T)$, и пропорционально плотности корней в этих слоях:

$$RAP(z,t) = \frac{NA(t) \cdot RWF(\eta) \cdot RTF(T) \cdot R(z,t)}{\int_0^{z_N} R(z,t) dz},$$

где $NA(t)$ — чистая первичная продуктивность; η — величина капиллярного напора; T — температура; $RWF(\eta)$ — водный, а $RTF(T)$ — температурный факторы прироста корней [Гильманов, 1978, с. 138, 144]. Как видим, уравнение (16) относится к тому же типу, что и (13) — в правой части опять нет производной от потока по глубине и, соответственно, не ставятся граничные условия. Но обратим внимание на то, что RTF зависит от температуры¹ почвы, а она, в свою очередь, задается уже «настоящим» уравнением в частных производных.

Температурный режим почвы описывается уравнением²

$$\partial T / \partial t = \partial(TCOND \cdot \partial T / \partial z) / \partial z + (Q / TCAP) \cdot \partial T / \partial z$$

с начальным условием

$$T(z,0) = T_0(z)$$

и граничными условиями

$$-k_1 \cdot TCOND(0) \cdot \partial T / \partial z|_{z=0} + v_1 \cdot T(0,t) = f_1(t),$$

$$k_2 \cdot TCOND(z_N) \cdot \partial T / \partial z|_{z=z_N} + v_2 \cdot T(z_N,t) = f_2(t),$$

где $TCAP$ и $TCOND$ — соответственно, теплоемкость и температуропроводность почвы,

$$Q = K(W) - D \cdot \partial W / \partial z,$$

здесь D — коэффициент капиллярной диффузивности; $K(W)$ — гидравлическая проводимость ненасыщенной почвы при влажности W ; Q — скорость потока влаги в почве (положительное направление которого считается ориентированным вниз). Пространственно-временная динамика влажности почвы в модели также описывается уравнением в частных производных с начальным и граничными условиями [Гильманов, 1978, с. 117–123, 143–144].

¹ Гильманов [1978, с. 140] приводит только график этой зависимости, но не формулу.

² В правой части этого уравнения первый член описывает кондуктивную температуропроводность почвы, а второй отражает изменение температуры за счет гравитационного и капиллярно-диффузионного переноса влаги и тепла [Гильманов, 1978, с. 123].

Пример распределенной модели в абстрактном пространстве

В [Bosatta and Ågren, 1985] предложена теория разложения гетерогенного субстрата. Его «гетерогенность» выражена при помощи непрерывной переменной q («качества» субстрата), принимающей значения от 0 (для самых устойчивых субстратов) до 1 (для наиболее легко разлагаемых субстратов). Углерод свежей органики изначально имеет какое-то распределение по переменной q , и с течением времени это распределение будет меняться, т.е. оно как бы «плывет» вдоль координаты q (от больших значений q к меньшим, поскольку в первую очередь разложится легкодоступная органика, характеризовавшаяся большими q). Таким образом, углерод органического субстрата может рассматриваться как «жидкость» с плотностью $\rho(q, t)$, движущаяся вдоль оси q . Величину $\rho(q, t) dq$ можно интерпретировать как количество углерода в органических веществах, характеризующихся «качеством» от q до $q + dq$. Тогда общее количество (C) углерода во всем субстрате в момент времени t :

$$C(t) = \int_0^1 \rho(q,t) dq.$$

Уравнение непрерывности для такой «жидкости»:

$$\partial \rho(q, t) / \partial t = \partial \Phi(q, t) / \partial q - S(q, t),$$

где $\Phi(q, t)$ — поток; $S(q, t)$ — мощность «стока», обусловленного потерями углерода при разложении (рис. 3).

Основным механизмом, обеспечивающим разложение (в особенности на его начальных стадиях), является активность микроорганизмов. Предположим, что, во-первых, органическое вещество, возвращаемое микробами в пул субстратов, имеет более низкое «качество», чем то, которое они потребили; во-вторых, потребление органики какого-либо «качества» пропорционально ее концентрации; и, в-третьих, доля углерода микробной биомассы (от всего углерода) постоянна. Этих предположений оказывается достаточно, чтобы получить следующее уравнение:

$$\partial \rho(q, t) / \partial t = \varepsilon \cdot f_c \cdot \partial [u(q) \cdot \rho(q, t)] / \partial q - [1/e(q) - 1] \cdot f_c \cdot u(q) \cdot \rho(q, t),$$

где $e(q)$ — эффективность, с которой органика «качества» q используется микробами для роста (т.е. это количество биомассы микробов, образующейся на единицу потребленного субстрата); $u(q)$ — скорость потребления субстрата микроорганизмами (с уменьшением q значения $e(q)$ и

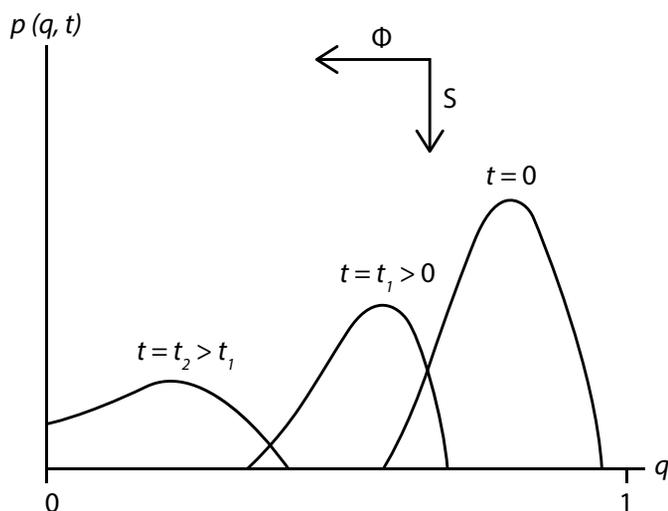


Рис. 3. Пример гипотетической динамики спектра (распределения) «качества» органического субстрата. Стрелками показаны направления действий двух «сил» (Φ и S), вызывающих «движение» [Bosatta and Ågren, 1985] распределения в этом абстрактном пространстве.

$u(q)$ уменьшаются); f_c — средняя концентрация углерода в микробной биомассе; ε — «масштабирующий» множитель¹ (в пределе, при $\varepsilon = 0$, член, ответственный за изменение «качества» органики, исчезает, и УЧП превращается в ОДУ $dp/dt = -[1/\varepsilon - 1] \cdot f_c \cdot u \cdot \rho$, описывающее динамику гомогенного — по своему «качеству» — субстрата) [Bosatta and Ågren, 1985].

Чтобы полностью поставить задачу, необходимо определить начальные и граничные условия. В [Bosatta and Ågren, 1985] приводится ряд предположений², которые, по утверждению

¹ Пусть субстрат состоит из n фракций различного «качества», причем количество углерода в i -й фракции — C_i ($i = 1$ соответствует самой труднорастворимой фракции, а $i = n$ — фракции наилучшего «качества»). Тогда $\varepsilon = \Delta q / \Delta i$ [Bosatta and Ågren, 1985].

² Среди которых особое внимание обращается на следующее. Все фракции могут потребляться микробами (биомасса которых — B). Скорость продукции (P_i) при росте микроорганизмов на i -й фракции вычисляется так: $P_i = u_i' \cdot B \cdot C_i / C = u_i' \cdot C_i$, где u_i' — удельная скорость роста микробов; $u_i = u_i' \cdot B / C$ [Bosatta and Ågren, 1985]. Предположение это — совершенно непонятное (и, возможно, оно ошибочно).

Действительно, при описании микробиологических процессов общепринятой формулой для скорости продукции биомассы, растущей на каком либо субстрате, является следующая: $P_i = u_i' \cdot B$ (см., например, [Pirt, 1975; Бондаренко и др., 1981; Vazin, 1981]). Зачем Bosatta and Ågren [1985] вводят сюда множитель (C_i/C)? Непонятно. Но, может быть, они вкладывают просто какой-то иной смысл в общепринятое понятие «удельная скорость роста»?

авторов, для простейшего случая, включающего только органику с «качеством» q_0 , приводят к относительно простому начальному условию: $\rho(q, 0) = C_0 \cdot \delta(q - q_0)$, где C_0 — начальное количество углерода, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака. А поскольку вещество может теряться только в результате разложения, интенсивность которого (S) входит в само уравнение, то потоки через границы должны быть нулевыми: $\Phi(0, t) = \Phi(1, t) = 0$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Другие модели

К настоящему времени подавляющее большинство моделей, включающих в себя описание динамики гумуса, представлены либо сосредоточенными моделями типа ОДУ (7) (возможно, с нестационарностями и нелинейностями в \mathbf{a} и \mathbf{b}), либо распределенными моделями типа УЧП (10). Однако существует небольшая доля моделей, использующих иной математический аппарат. В частности, выше на самом деле я рассмотрел только «половину» модели Bosatta-Ågren [1985], причем, можно сказать, меньшую половину — более простую часть модели, которая описывает динамику углерода почвенного органического вещества. Но модель эта содержит еще одно уравнение, предназначенное для описания динамики азота почвенной органики. И оно оказывается не ОДУ и не УЧП, а более сложным (**интегро-дифференциальным!**) уравнением. Не имея возможности затрагивать в этом кратком выступлении всю подобную экзотику, я хотел бы в качестве примера «не-дифференциальных» моделей относительно подробно остановиться лишь на так называемых матричных моделях.

Эти модели представляются матричным уравнением

$$F \cdot \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t + 1), \quad (17)$$

где $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{u}(t + 1)$ — вектор-столбцы [Jeffers, 1978], характеризующие состояние моделируемой системы, соответственно, в момент времени t и $t + 1$; F — переходная матрица («transition matrix» [Jenkinson and Rayner, 1977]). Рассмотрим в качестве простого примера систему, состоящую всего лишь из трех блоков: (1) атмосфера, (2) растения, (3) гумус. Тогда, обозначив содержание углерода в этих блоках через u_i , где $i = 1, 2$ или 3 (соответственно номеру блока), будем иметь векторы $\mathbf{u}(t + 1) = [u_1(t + 1) \ u_2(t + 1) \ u_3(t + 1)]^T$ и $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t)]^T$. Задав формально матрицу F ее элементами f_{ij} ,

выполним умножение¹ $F \cdot u(t)$:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \cdot u_1(t) + f_{12} \cdot u_2(t) + f_{13} \cdot u_3(t) \\ f_{21} \cdot u_1(t) + f_{22} \cdot u_2(t) + f_{23} \cdot u_3(t) \\ f_{31} \cdot u_1(t) + f_{32} \cdot u_2(t) + f_{33} \cdot u_3(t) \end{bmatrix},$$

откуда становится очевидным, что

$$u_i(t+1) = f_{i1} \cdot u_1(t) + f_{i2} \cdot u_2(t) + f_{i3} \cdot u_3(t). \quad (18)$$

Легко заметить, что полученное выражение очень похоже на правую часть ур. (7). Запишем систему (7) для нашего частного случая 3-ком-
 партментной модели:

$$\begin{aligned} du_1/dt = & b_1 + a_{11} \cdot u_1 + a_{21} \cdot u_2 + a_{31} \cdot u_3 - a_{11} \cdot u_1 - \\ & - a_{12} \cdot u_1 - a_{13} \cdot u_1 = (b_1/u_1 - a_{12} - a_{13}) \cdot u_1 + \\ & + a_{21} \cdot u_2 + a_{31} \cdot u_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} du_2/dt = & b_2 + a_{12} \cdot u_1 + a_{22} \cdot u_2 + a_{32} \cdot u_3 - \\ & - a_{21} \cdot u_2 - a_{22} \cdot u_2 - a_{23} \cdot u_2 = a_{12} \cdot u_1 + \\ & + (b_2/u_2 - a_{21} - a_{23}) \cdot u_2 + a_{32} \cdot u_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} du_3/dt = & b_3 + a_{13} \cdot u_1 + a_{23} \cdot u_2 + a_{33} \cdot u_3 - a_{31} \cdot u_3 - \\ & - a_{32} \cdot u_3 - a_{33} \cdot u_3 = a_{13} \cdot u_1 + a_{23} \cdot u_2 + \\ & + (b_3/u_3 - a_{31} - a_{32}) \cdot u_3. \end{aligned}$$

Проинтегрируем эти уравнения простейшим численным методом Эйлера на одном шаге по времени от t до $t + \Delta t$:

$$u_1(t + \Delta t) = u_1(t) + (b_1/u_1 - a_{12} - a_{13}) \cdot \Delta t \cdot u_1 + a_{21} \cdot \Delta t \cdot u_2 + a_{31} \cdot \Delta t \cdot u_3,$$

$$u_2(t + \Delta t) = a_{12} \cdot \Delta t \cdot u_1 + u_2(t) + (b_2/u_2 - a_{21} - a_{23}) \cdot \Delta t \cdot u_2 + a_{32} \cdot \Delta t \cdot u_3,$$

$$u_3(t + \Delta t) = a_{13} \cdot \Delta t \cdot u_1 + a_{23} \cdot \Delta t \cdot u_2 + u_3(t) + (b_3/u_3 - a_{31} - a_{32}) \cdot \Delta t \cdot u_3.$$

Сравнивая (18) и эти уравнения, полученные, напомним, путем численного решения (методом Эйлера) системы (7), замечаем, что если элементы переходной матрицы сформированы по простому правилу

$$f_{ij} = \begin{cases} a_{ji} & \text{при } j \neq i \\ 1 + b_i / u_i + a_{ii} - \sum_{k=1}^n a_{ik} & \text{при } j = i, \end{cases}$$

то матричная модель (17) может быть интерпретирована как результат численной аппроксимации по методу Эйлера (при $\Delta t = 1$) линейной сосредоточенной системы (7). Пример реальной матричной модели для 5-ком-
 партментной

¹ Произведение $F \cdot U$ сцепленных матриц F (размера $m \times n$) и U ($r \times s$) есть матрица C (размера $m \times s$), где элемент, стоящий в i -ой строке и k -ом столбце, получается в виде скалярного произведения i -ой вектор-строки матрицы F на k -ый вектор-столбец матрицы U (матрицы F и U называются *сцепленными*, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй) [Бронштейн и Семендяев, 1986, с. 160].

системы (разлагаемый растительный материал; растительные останки, устойчивые к разложению, почвенная биомасса; физически стабилизированное и химически стабилизированное органическое вещество) можно найти в [Jenkinson and Rayner, 1977].

Динамика гумуса в глобальных моделях биосферы

В последнее время в научной литературе все большее внимание уделяется вопросам дезорганизации среды вследствие технического прогресса и влияния человека на биосферу в целом [Моисеев и др., 1979]. Чрезвычайно актуальная задача — учет возможных последствий всей совокупности взаимодействия природы и общества и выбор приемлемых путей коэволюции человека и биосферы — может решаться только с помощью математических методов анализа сложных динамических систем и, более того, требует совершенствования самих этих методов, разработки и применения нетрадиционных подходов [Моисеев и др., 1980].

К настоящему времени основным результатом этих работ явилось создание советскими учеными глобальной² модели биосферы, среди уравнений которой важную роль играет уравнение динамики гумуса. Эта модель подробно описана в [Моисеев и др., 1979; 1980; Крапивин и др., 1982], причем в первых двух работах приведены тексты программ (на языке ФОРТРАН-IV), позволяющие любому желающему воспроизвести модель и поставить интересующие его вычислительные эксперименты. Однако упомянутая модель — не единственная.

Первой глобальной моделью была модель круговорота веществ, предложенная В.А. Костицыным [Моисеев, 1984, с. 59], которой я кратко коснулся выше в разд. «Пионеры...» и там же объяснил почему подробно рассматривать ее не буду. Также представленная выше (в разд. «7-ком-
 партментная...») модель цикла углерода Bolin [1981] тоже, конечно, является глобальной, так как описывает динамику количества углерода **во всей атмосфере** Земли, **во всей биоте** нашей планеты, **во всей почве и во всем океане**. Примерно аналогичными по сложности являются глобальные модели биогеохимических циклов, описанные в

² Поскольку, согласно [Моисеев, 1984, с. 54], «глобальными» теперь принято называть любые проблемы, относящиеся к планете в целом, то под «глобальной моделью» будем понимать математическую модель, переменные которой относятся именно к планете в целом, например, если в модель входит такая переменная, как «содержание гумуса», то это либо среднее содержание в почвах всей Земли, либо суммарное количество гумуса на нашей планете.

[Моисеев и др., 1985, с. 153-170], содержащие от 4 до 8 ОДУ и среди них — уравнения для гумуса (отдельные уравнения для травяных и лесных экосистем или отдельно для углерода и азота гумуса).

Вообще же 8-компарментные модели в настоящее время довольно популярны (вероятно, они позволяют соблюсти некоторый разумный баланс между простотой модели и точностью описания реальной системы). В частности, недавно акад. Моисеев [1984, с. 76] предпринял попытку исправить модель Костицына, в результате чего появилась еще одна глобальная модель — 8-компарментная (СО₂ атмосферы и отдельно — океана; растения суши; растения океана; аналогично — животные суши и океана, а также земная кора, включая почву; и, наконец, органическое вещество в океане). На первый взгляд эта попытка может показаться успешной, поскольку ур. (1) приобрело теперь более разумный вид: $ds/dt = \alpha_{35} \cdot u + \alpha_{45} \cdot v - \alpha_{67} \cdot s$, т.е. появился отрицательный член, который... Вы, вероятно, подумали «описывает разложение гумуса в процессе почвенного дыхания» — то, чего не было в модели Костицына и отсутствие чего делало ее довольно-таки бессмысленной? Увы. Моисеев [1984, с. 76] разбивает эту надежду: «... α_{67} характеризует снос органических остатков в океан, прежде всего, за счет водной эрозии...». И, соответственно, член $+\alpha_{67} \cdot s$ появляется только в уравнении для углерода океана, но не атмосферы. Так что и модифицированная модель Костицына-Моисеева не учитывает важнейший процесс, пополняющий пул СО₂ атмосферы, а потому и на ее подробное рассмотрение тратить время не будем.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор выражает благодарность выдающемуся советскому ученому В.В. Зеленеу, не только убедившего его в полезности и даже необходимости подготовки данного доклада, но и снабдившего англоязычной литературой по этой теме. В высшей степени полезное обсуждение материалов доклада имело место с талантливым почвоведом О.И. Минько. Критические замечания микробиолога Н.С. Паникова также, вероятно, достойны благодарности.

ПРИЛОЖЕНИЕ: ОБ ОДНОЙ ОШИБОЧНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ТИПОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Согласно [Галицкий и др., 1977], «*математическое* моделирование объединяет широкий спектр методов исследования с применением

математического аппарата», т.е. классификация осуществляется на основе используемого аппарата. Поэтому вполне естественным выглядит то, что наряду с МаМ авторы рассматривают «*физическое моделирование*: специальные лабораторные и полевые опыты...»; «*концептуальное (понятийное) моделирование*... схемы, диаграммы,... графические представления, последовательности символов типа профильных и процессных кодов...»; «информационное моделирование — создание информационно-поисковых систем...». А вот «*программное моделирование* заключается в имитации представлений о состоянии почвы и процессах в ней в форме программы или пакетов программ для ЭВМ». Но ведь любое «исследование с применением математического аппарата» (т.е. МаМ — см. авторское определение выше), которое можно осуществить при помощи карандаша и бумаги, можно выполнить и на ЭВМ. Причем упоминание Галицким и др. [1977] «программы или пакетов программ для ЭВМ» позволяет сделать вывод, что под ЭВМ они понимают лишь электронно-цифровые вычислительные машины (ЭЦВМ).

Итак, независимо от того, будем ли мы реализовывать математические методы на бумаге или при помощи вычислительной машины, в обоих случаях используется математический аппарат, (например, уравнение диффузии газа в почве). Таким образом, очевидно, что программное моделирование — это не отдельный (наряду с математическим) тип моделирования, а подтип математического моделирования, выделяемый на основе способа реализации математических вычислений — на ЭЦВМ. Но почему я говорю только «для ЭЦВМ», а не вообще «для ЭВМ»?

Потому что ЭВМ могут быть не только цифровыми, но и аналоговыми, но для аналоговых ЭВМ программы не пишутся, способ решения математических задач на них — совершенно другой [Лукнер и Шестаков, 1976, с. 141–143]. Строго говоря, под моделирующими устройствами понимаются материальные системы, реализующие математические модели для получения решений¹ рассматриваемых задач. По принципу

¹ Вообще говоря, Лукнер и Шестаков [1976, с. 106], давая это определение «моделирующих устройств», пишут не просто «решений», а «численных решений». Очевидно, что они ошибаются. Что же, если вычислительная машина реализует какую-то простенькую математическую модель, для которой она сможет найти аналитическое (а не численное!) решение, то такая машина, не будет моделирующим устройством? Почему!? А вот если потом ее запрограммируют на получение именно численного решения, то она мистическим образом тут же превратится

своего действия они разделяются на следующие виды: 1) аналоговые моделирующие устройства (АМУ); 2) аналоговые вычислительные машины; 3) ЭЦВМ; 4) гибридные вычислительные машины или аналогоцифровые вычислительные комплексы (составляются из электрических АМУ, управление которыми осуществляется ЭЦВМ). Аналоговое устройство реализует на модели математически подобные физические поля (наибольшее распространение имеют электрические АМУ, основанные на электрогидродинамической аналогии, но определенное значение сохранили гидравлические устройства, хотя их использование связано с существенными технологическими и методическими сложностями) [Лукнер и Шестаков, 1976, с. 106]. В любом случае, фактически, при аналоговом моделировании мы опять же «решаем» математические уравнения или вообще осуществляем какие-то математические действия (интегрирование, дифференцирование и др.), но не в виде знаков на бумаге и не в виде программы на каком-либо машинном языке, а в виде, например, электрической схемы (если речь идет об электрической АМУ).

ЛИТЕРАТУРА

- Бондаренко Н.Ф., Журавлев О.С., Швытов И.А. 1981. Моделирование трансформаций органических веществ в почвах // Моделирование биогеоценологических процессов / Под ред. В.В. Галицкого. М.: Наука. С. 136–141. [Bondarenko N.F., Zhuravlev O.S., Shvytov I.A. 1981. Modelirovanie transformatsii organicheskikh veshchestv v pochvakh // Modelirovanie biogeotsenoticheskikh protsessov / Ed. V.V. Galitskogo. Moscow: Nauka. P. 136–141. (In Russian)]
- Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. 1986. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука. С. 544. [Bronshstein I.N., Semendyaev K.A. 1986. Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov. Moscow: Nauka. P. 544. (In Russian)]
- Воронцов-Вельяминов Б.А. 1985. Лаплас. М.: Наука. С. 288. [Vorontsov-Vel'yaminov B.A. 1985. Laplas. Moscow: Nauka. P. 288. (In Russian)]
- Галицкий В.В., Дмитриев Е.А., Карпачевский Л.О., Кауричев И.С., Рожков В.А. 1977. Моделирование в почвенных исследованиях // Тезисы докладов V делегатского съезда Всесоюзного общества почвоведов (11–15 июля 1977 г., г. Минск). Вып. VIII. Минск: Белорусский НИИ почвоведения и агрохимии. С. 96–98. [Galitskii V.V., Dmitriev E.A., Karpachevskii L.O., Kaurichev I.S., Rozhkov V.A. 1977. Modelirovanie v pochvennykh issledovaniyakh // Tezisy докладov V delegatskogo s"ezda Vsesoyuznogo obshchestva pochvedov (11–15 iyulya 1977 g., g. Minsk). Issue VIII. Minsk: Belorusskii NII pochvovedeniya i agrokhimii. P. 96–98. (In Russian)]
- Гильманов Т.Г. 1977. Проблемы моделирования почвы при построении комплексных имитационных моделей экосистемы // Тезисы докладов V делегатского съезда Всесоюзного общества почвоведов (11–15 июля 1977 г., г. Минск). Вып. VIII. Минск: Белорусский НИИ почвоведения и агрохимии. С. 111–113. [Gil'manov T.G. 1977. Problemy modelirovaniya pochvy pri postroenii kompleksnykh imitatsionnykh modelei ekosistemy // Tezisy докладov V delegatskogo s"ezda Vsesoyuznogo obshchestva pochvedov (11–15 iyulya 1977 g., g. Minsk). Issue VIII. Minsk: Belorusskii NII pochvovedeniya i agrokhimii. P. 111–113. (In Russian)]
- Гильманов Т.Г. 1978. Математическое моделирование биогеохимических циклов в травяных экосистемах. М.: Изд-во МГУ. С. 169. [Gil'manov T.G. 1978. Matematicheskoe modelirovanie biogeokhimicheskikh tsiklov v travyanykh ekosistemakh. Moscow: Publishing house MSU. P. 169. (In Russian)]
- Гончар-Зайкин П.П., Дынкин Л.Д., Дынкин С.Д., Журавлев О.С. 1981. Модель газообмена в системе «микроорганизмы-почва-атмосфера» // Моделирование биогеоценологических процессов / Под ред. В.В. Галицкого. М.: Наука. С. 142–148. [Gonchar-Zaikin P.P., Dynkin L.D., Dynkin S.D., Zhuravlev O.S. 1981. Model' gazoobmena v sisteme «mikroorganizmy-pochva-atmosfera» // Modelirovanie biogeotsenoticheskikh protsessov / Ed. V.V. Galitskogo. Moscow: Nauka. P. 142–148. (In Russian)]
- Гутер Р.С., Резниковский П.Т. 1971. Программирование и вычислительная математика. М.: Наука. Вып. 2. Вычислительная математика. Программная реализация вычислительных методов. С. 264. [Guter R.S., Reznikovskii P.T. 1971. Programmirovaniye i vychislitel'naya matematika. Moscow: Nauka. Issue 2. Vychislitel'naya matematika. Programmnaya realizatsiya vychislitel'nykh metodov. P. 264. (In Russian)]
- Довнар В.С. 1977. К вопросу построения математической модели динамики гумуса в дерново-подзолистых почвах // Тезисы докладов V делегатского съезда Всесоюзного общества почвоведов (11–15 июля 1977 г., Минск). Вып. V. Минск: Белорусский НИИ почвоведения и агрохимии. С. 245–246. [Dovnar V.S. 1977. K voprosu postroeniya matematicheskoi modeli dinamiki gumusa v dernovo-podzolistykh pochvakh // Tezisy докладov V delegatskogo s"ezda Vsesoyuznogo obshchestva pochvedov (11–15 iyulya 1977 g., Minsk). Issue V. Minsk: Belorusskii NII pochvovedeniya i agrokhimii. P. 245–246. (In Russian)]
- Ковда В.А. 1973. Основы учения о почвах. Общая теория почвообразовательного процесса. Кн. первая. М.: Наука. С. 33–34. [Kovda V.A. 1973. The principles of pedology.

в моделирующее устройство? Что за чепуха!? Но, может быть, ЭЦВМ не умеют искать аналитические решения? Это зависит не от машины, а от реализованного на ней языка программирования. К счастью, поскольку многие из присутствующих в этом зале работали на нашей факультетской ЭЦВМ МИР-2, которая (на языке Аналитик) легко осуществляет аналитические преобразования, то мне нет смысла лишней раз доказывать эту очевидную истину.

¹ Мы дополнили авторский список литературы публикацией [Орлов и др., 1987]. — Примечание издателей.

- General theory of soil formation. First book. Moscow: Publishing house "Nauka". P. 33–34. (In Russian)]
11. Коновалов Н.Ю., Гончар-Зайкин П.П., Журавлев О.С. 1985. Моделирование гумусового режима полей с учетом агроэкологических взаимодействий // Тезисы докладов VII делегатского съезда Всесоюзного общества почвоведов (9-13 сентября 1985 г., г. Ташкент). Часть 1. Ташкент: Институт почвоведения и агрохимии АН УзССР. С. 126. [Konovalov N.Yu., Gonchar-Zaikin P.P., Zhuravlev O.S. 1985. Modelirovanie gumusovogo rezhima polei s uchetom agroekologicheskikh vzaimodeistvii // Tezisy dokladov VII delegatskogo s"ezda Vsesoyuznogo obshchestva pochvedovedov (9-13 sentyabrya 1985 g., g. Tashkent). Chast' 1. Tashkent: Institut pochvovedeniya i agrokhimii AN UzSSR. P. 126. (In Russian)]
 12. Крапивин В.Ф., Свирижев Ю.М., Тарко А.М. 1982. Математическое моделирование глобальных биосферных процессов. М.: Наука. 272 с. [Krapivin V.F., Svirizhev Yu.M., Tarko A.M. 1982. Matematicheskoe modelirovanie global'nykh biosfernykh protsessov. Moscow: Nauka. 272 p. (In Russian)]
 13. Крупеников И.А. 1981. История почвоведения (от времени его зарождения до наших дней). М.: Наука. [Krupenikov I.A. 1981. Istoriya pochvovedeniya (ot vremeni ego zarozhdeniya do nashikh dnei). Moscow: Nauka. (In Russian)]
 14. Куртнер Д.А., Чудновский А.Ф. 1979. Агрометеорологические основы тепловой мелиорации почв. Л.: Гидрометеоиздат. [Kurtener D.A., Chudnovskii A.F. 1979. Agrometeorologicheskie osnovy teplovoi melioratsii pochv. Leningrad: Gidrometeoizdat. (In Russian)]
 15. Лукнер Л., Шестаков В.М. 1976. Моделирование геофилтрации. М.: Недра. С. 407 [Lukner L., Shestakov V.M. 1976. Modelirovanie geofil'tratsii. Moscow: Nedra. P. 407 (In Russian)]
 16. Мамахин С.В., Тихомиров Ф.А. 1984. Математическое моделирование многолетней динамики органического углерода в черноземе типичном агроценоза // Почвоведение. № 8. С. 98–102. [Mamikhin S.V., Tikhomirov F.A. 1984. Mathematical modelling of organic carbon long-term dynamics in typical chernozem of agrocoenoses // Pochvovedenie. N. 8. P. 98–102. (In Russian)]
 17. Мироненко Е.В., Пачепский Я.А. 1980. Водная миграция ионов и химических соединений в почвах. Линейные модели. Материалы по математическому обеспечению ЭВМ. Пушино. [Mironenko E.V., Pachepskii Ya.A. 1980. Vodnaya migratsiya ionov i khimicheskikh soedinenii v pochvakh. Lineinye modeli. Materialy po matematicheskomu obespecheniyu EVM. Pushchino. (In Russian)]
 18. Моисеев Н.Н. 1984. Предисловие редактора. Комментарии к «Эволюции атмосферы» В.А. Костицына // Костицын В.А. Эволюция атмосферы, биосферы и климата. М.: Наука. С. 4–7, 46–96. [Moiseev N.N. 1984. Predislovie redaktora. Kommentarii k «Evolutsii atmosfery» V.A. Kostitsyna // Kostitsyn V.A. Evolyutsiya atmosfery, biosfery i klimata. Moscow: Nauka. P. 4–7, 46–96. (In Russian)]
 19. Моисеев Н.Н., Александров В.В., Тарко А.М. 1985. Человек и биосфера. М.: Наука. С. 272 [Moiseev N.N., Aleksandrov V.V., Tarko A.M. 1985. Chelovek i biosfera. Moscow: Nauka. P. 272. (In Russian)]
 20. Моисеев Н.Н., Крапивин В.Ф., Свирижев Ю.М., Тарко А.М. 1980. Системный анализ динамических процессов биосферы // Человек и биосфера. Вып. 4 / Под ред. В.Д. Федорова. М.: Изд-во МГУ. С. 228–267. [Moiseev N.N., Krapivin V.F., Svirizhev Yu.M., Tarko A.M. 1980. Sistemnyi analiz dinamicheskikh protsessov biosfery // Chelovek i biosfera. Vyp. 4 / Pod red. V.D. Fedorova. Moscow: Izd-vo MGU. P. 228–267. (In Russian)]
 21. Моисеев Н.Н., Свирижев Ю.М., Крапивин В.Ф., Тарко А.М., Айвазян М.П. 1979. Реализация на ЭВМ глобальной модели биосферы // Вопросы математического моделирования / Под ред. В.Ф. Крапивина. М.: ИРЭ АН СССР. С. 333–369. [Moiseev N.N., Svirizhev Yu.M., Krapivin V.F., Tarko A.M., Aivazyan M.P. 1979. Realizatsiya na EVM global'noi modeli biosfery // Voprosy matematicheskogo modelirovaniya / Pod red. V.F. Krapivina. Moscow: IRE AN SSSR. P. 333–369. (In Russian)]
 22. Орлов Д.С. 1985. Вклад Павла Андреевича Костычева в развитие химии почв (К 140-летию со дня рождения и 90-летию со дня смерти) // Почвоведение. № 9. С. 84–90. [Orlov D.S. 1985. Prof. Dr. P.A. Kostychev's contribution into the development of the soil chemistry (to the 140th birthday and 90 years after his death) // Pochvovedenie. No. 9. P. 84–90. (In Russian)]
 23. Орлов Д.С. 1985а. Химия почв. М.: Изд-во МГУ. С. 376. [Orlov D.S. 1985a. Khimiya pochv. Moscow: Publishing house MSU. P. 376. (In Russian)]
 24. Орлов Д.С., Минько О.И., Аммосова Я.М., Каспаров С.В., Глаголев М.В. 1987. Методы исследования газовой функции почвы // Современные физические и химические методы исследования почв. М.: Изд-во МГУ. С. 118–156. [Orlov D.S., Min'ko O.I., Ammosova Ya.M., Kasparov S.V., Glagolev M.V. 1987. Metody issledovaniya gazovoi funktsii pochvy // Sovremennye fizicheskie i khimicheskie metody issledovaniya pochv. Moscow: Publishing house MSU. P. 118–156. (In Russian)]
 25. Павлова Н.Н., Борисов Г.А., Синькевич Е.И. 1977. Применение функции урожайности для определения оптимальных доз удобрений // Тезисы докладов V делегатского съезда Всесоюзного общества почвоведов (11-15 июля 1977 г., Минск). Вып. V. Минск: Белорусский НИИ почвоведения и агрохимии. С. 188–189. [Pavlova N.N., Borisov G.A., Sin'kevich E.I. 1977. Primenenie funktsii urozhainosti dlya opredeleniya optimal'nykh doz udobrenii // Tezisy dokladov V delegatskogo s"ezda Vseoyuznogo obshchestva pochvedovedov (11-15 iyulya 1977 g., Minsk). Issue V. Minsk: Belorusskii NII pochvovedeniya i agrokhimii. P. 188–189. (In Russian)]
 26. Свирижев Ю.М. 1981. Предисловие // Математические модели в экологии и генетике. М.: Наука. С. 3. [Svirizhev Yu.M. 1981. Predislovie // Matematicheskie modeli v ekologii i genetike. Moscow: Nauka. P. 3 (In Russian)]
 27. Чертов О.Г., Прохоров В.М. 1977. Построение общей модели почвенной системы // Тезисы докладов V делегатского съезда Всесоюзного общества почвоведов

- (11-15 июля 1977 г., г. Минск). Вып. VIII. Минск: Белорусский НИИ почвоведения и агрохимии. С. 117–118. [Chertov O.G., Prokhorov V.M. 1977. Postroenie obshchei modeli pochvennoi sistemy // Tezisy dokladov V delegatskogo s»ezda Vsesoyuznogo obshchestva pochvovedov (11-15 iyulya 1977 g., g. Minsk). Issue VIII. Minsk: Belorusskii NII pochvovedeniya i agrokhimii. P. 117–118. (In Russian)]
28. Bazin M.J. 1981. Mixed Culture Kinetics // Bushell M.E., Slater J.H. (eds). Mixed Culture Fermentations. London etc.: Academic Press. P. 25–51.
 29. Bolin B. 1981. Steady State and Response Characteristics of a Simple Model of the Carbon Cycle // SCOPE 16: Carbon Cycle Modelling / Bolin B. (Ed.). Chichester etc.: JOHN WILEY & SONS. P. 315–334.
 30. Bosatta E., Egren G.I. 1985. Theoretical analysis of decomposition of heterogeneous substrates // Soil Biol. Biochem. Vol. 17. No. 5. P. 601–610.
 31. Emanuel W.R., Killough G.E.G., Olson J.S. 1981. Modelling the Circulation of Carbon in the World's Terrestrial Ecosystems // SCOPE 16: Carbon Cycle Modelling / Bolin B. (Ed.). Chichester etc.: JOHN WILEY & SONS. P. 335–353.
 32. Hamming R.W. 1962. Numerical Methods for Scientists and Engineers. New York: McGraw-Hill.
 33. Hunt H.W. 1977. A Simulation Model for Decomposition in Grassland // Ecology. Vol. 58. P. 469–484.
 34. Hunt H.W. 1978. A Simulation Model for Decomposition in Grassland // Grassland simulation model. New York Inc.: Springer-Verlag. P. 155–183.
 35. Jeffers J.N.R. 1978. An Introduction to Systems Analysis: with ecological applications. London: Edward Arnold.
 36. Jenkinson D.S., Rayner J.H. 1977. The turnover of soil organic matter in some of the Rothamsted classical experiments // Soil Science. Vol. 123. No. 5. P. 298–305.
 37. Kostitzin V.A. 1935. Evolution de l'atmosphère. Paris: Hermann.
 38. Molina J.A.E., Clapp C.E., Shaffer M.J., Chichester F.W., Larson W.E. 1983. NCSOIL, a model of nitrogen and carbon transformations in soil: description, calibration, and behavior // Soil Sci. Soc. Am. J. Vol. 47. P. 85–91.
 39. Pirt S.J. 1975. Principles of Microbe and Cell Cultivation. Oxford etc.: Blackwell Scientific Publications.
 40. Van Veen J.A., Paul E.A. 1981. Organic carbon dynamics in grassland soils. 1. Background information and computer simulation // Can. J. Soil Sci. Vol. 61. P. 185–201.
 41. Wiener N. 1958. My Connection with Cybernetics, Its Origins and Its Future // Cybernetica (Namur). Vol. 1. No 1. P. 1–14.

Received: 05.11.2021

Revised: 01.12.2021

Accepted: 24.12.2021